

# Korkeamman asteen epäyhtälön ratkaiseminen

1. Muokkaa epäyhtälöä tarvittaessa niin, että epäyhtälömerkin oikealla puolella on nolla.
2. Ratkaise yhtälön oikeaa puolta vastaavan polynomifunktion nollakohdat (tulon nollasääntöä hyödyntäen).
3. Laadi *merkkikaavio*.
  - Kaavioon merkitään funktion nollakohdat ja "lokerot" funktion arvojen etumerkeille nollakohtien väliin.
  - Koska polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan, riittää valita vain yksi testikohta jokaisesta "lokerosta". (Merkit voi usein päätellä myös ilman testipisteitä tekijöiden avulla, ks. oppikirja s. 124.)
4. Päättele kaavion avulla milloin alkuperäinen epäyhtälö toteutuu.

t. 452, s. 127

a)  $x^3 \leq 4x(x - 1)$

$$x^3 \leq 4x^2 - 4x$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x \leq 0$$

Ratkaistaan vastaavan funktion  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$  nollakohdat tulon nollasäännön avulla.

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

Toinen tapa muistikaavan avulla:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Testataan funktion merkit (nollakohtien väliltä ja ulkopuolelta) kohdissa  $x = -1$ ,  $x = 1$  ja  $x = 3$  (SpeedCrunchin avulla). Tarkistetaan ensin, että nollakohdat ovat oikein.

Laaditaan merkkikaavio Abitin editorin taulukko-toiminnon "array" avulla. (Sarakkeita saa lisättyä sarkain-näppäimellä "Tab".)

$x$		0		2	
$f(x)$	-	0	+	0	+

Alkuperäinen epäyhtälö on tosi, kun  $f(x) \leq 0$ . Merkkikaavion perusteella tämä toteutuu, kun  $x \leq 0$  tai  $x = 2$ .

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f(-1) = -9 \quad -$$

$$f(1) = 1 \quad +$$

$$f(3) = 3 \quad +$$

b)  $x^3 > 9x$

$$x^3 - 9x > 0$$

Ratkaistaan vastaavan funktion  $f(x) = x^3 - 9x$  nollakohdat tulon nollasäännön avulla.

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

$$x = \pm 3$$

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f(-4) = -28$$

$$f(-1) = 8$$

$$f(1) = -8$$

$$f(4) = 28$$

Muista tarkistaa myös nollakohdat, mutta vastaukseen ei tarvitse tätä tarkistusta merkitä.

Testaan merkit ja laaditaan merkkikaavio.

$x$		-3		0		3	
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Alkuperäinen epäyhtälö on tosi, kun  $f(x) > 0$ .

Kaavion perusteella tämä toteutuu, kun  $-3 < x < 0$  tai  $x > 3$ .

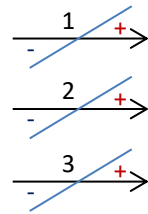
c)  $(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$

Vastaavan funktion  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  nollakohdat nähdään (tulon nollasäännön perusteella) suoraan tekijöistä. Nollakohdat ovat  $x = 1, x = 2, x = 3$ .

Päätellään merkit oppikirjan s. 124 mallin mukaisesti ilman testipisteitä.

Tekijät ovat ensimmäisen asteen polynomeja, joiden kuvaajat ovat nousevia suoria. Tekijät ovat siis negatiivisia nollakohtansa vasemmalla puolella ja positiivisia oikealla puolella.

$x$		1		2		3	
$x - 1$	-	0	+		+		+
$x - 2$	-		-	0	+		+
$x - 3$	-		-		-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+



Parillinen määrä miinuksia tekijöissä: +  
Pariton määrä miinuksia tekijöissä: -

Alkuperäinen epäyhtälö on tosi, kun  $f(x) < 0$ .

Kaavion perusteella tämä toteutuu, kun  $x < 1$  tai  $2 < x < 3$ .