Korkeamman asteen epäyhtälön ratkaiseminen

1. Muokkaa epäyhtälöä tarvittaessa niin, että epäyhtälömerkin oikealla puolella on nolla.
2. Ratkaise yhtälön oikeaa puolta vastaavan polynomifunktion nollakohdat (tulon nollasääntöä hyödyntäen).
3. Laadi *merkkikaavio.*
   - Kaavioon merkitään funktion nollakohdat ja ”lokerot” funktion arvojen etumerkeille nollakohtien väliin.
   - Merkit voi päätellä tekijöiden avulla oppikirja s. 124 mallin mukaan tai käyttämällä ns. *testipisteitä*. Koska polynomifunktio voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan, riittää valita vain yksi testikohta jokaisesta ”lokerosta”.
4. Päättele kaavion avulla milloin alkuperäinen epäyhtälö toteutuu.

t. 452, s. 127

a)

$$x^3 \leq 4x(x-1)$$

$$x^3 \leq 4x^2 - 4x$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x \leq 0$$

Ratkaistaan vastaavan funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ nollakohdat tulon nollasäännön avulla.

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4x + 4 = 0$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saadaan

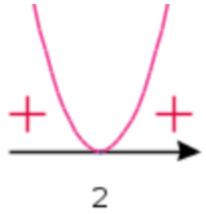
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

Toinen tapa muistikaavan avulla:
$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Laaditaan merkkikaavio Abitin editorin taulukko-toiminnon ”array” avulla. (Sarakkeita saa lisättyä sarkain-näppäimellä ”Tab”.). Merkitään taulukkoon sarakkeet nollakohdille $x = 0$ ja $x = 2$ sekä ”lokerot” nollakohtien eri puolille.

Päätellään tulon $f(x) = x(x^2 - 4x + 4)$ merkki sen tekijöiden merkeistä.

$y = x^2 - 4x + 4$



Tekijää $x^2 - 4x + 4$ kuvaa ylöspäin aukeava paraabeli, jonka ainoa nollakohta on $x = 2$. Siis $x^2 - 4x + 4 > 0$, kun $x \neq 2$ ja $x^2 - 4x + 4 = 0$, kun $x = 2$.

Tekijän x merkki vaihtuu negatiiviseksi positiiviseksi kohdassa $x = 0$. (Tekijää kuvaa nouseva suora $y = x$.)

$y = x$

		0		2	
$x^2 - 4x + 4$	$+$		$+$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Parillinen määrä miinuksia tekijöissä: **+**
Pariton määrä miinuksia tekijöissä: **-**

Alkuperäinen epäyhtälö $x^3 \leq 4x(x-1)$ on tosi, kun $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x \leq 0$. Merkkikaavion perusteella tämä toteutuu, kun $x \leq 0$ tai $x = 2$.

b) $x^3 > 9x$

$x^3 - 9x > 0$

Ratkaistaan vastaavan funktion $f(x) = x^3 - 9x$ nollakohdat tulon nollasäännön avulla.

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9 \quad \Big| \sqrt{}$$

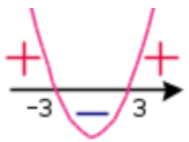
$$x = \pm 3$$

Laaditaan merkkikaavio tekijöiden merkkien avulla.

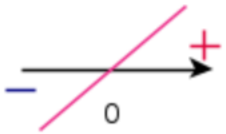
Tekijää $x^2 - 9$ kuvaa ylöspäin aukeava paraabeli, joka on nollakohtiensa $x = \pm 3$ välillä negatiivinen.

Tekijän x merkki vaihtuu negatiiviseksi positiiviseksi kohdassa $x = 0$.

$y = x^2 - 9$



$y = x$



Merkkikaavio:

		-3		0		3	
x^2-9	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Alkuperäinen epäyhtälö $x^3 > 9x$ on tosi, kun $f(x) = x^3 - 9x > 0$.

Kaavion perusteella tämä toteutuu, kun $-3 < x < 0$ tai $x > 3$.

Merkit testipisteiden avulla:

Testataan merkit joka ”lokerosta” esimerkiksi kohdista $x = -4, x = -1, x = 1$ ja $x = 4$.

Sijoitetaan nämä x:n arvot funktioon $f(x) = x^3 - 9x$.

$f(-4) = (-4)^3 - 9 \cdot (-4) = -28$ $-$

$f(-1) = (-1)^3 - 9 \cdot (-1) = 8$ $+$

$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1 = -8$ $-$

$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4 = 28$ $+$

Abicus:

(−4) ^ 3 − 9 × (−4)

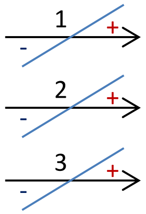
= -28

c) $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$

Vastaavan funktion $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ nollakohdat nähdään (tulon nollasäännön perusteella) suoraan tekijöistä. Nollakohdat ovat $x = 1, x = 2, x = 3$.

Tekijät ovat ensimmäisen asteen polynomeja, joiden kuvaajat ovat nousevia suoria (kulmakerroin eli x:n kerroin kaikissa 1). Tekijät ovat siis negatiivisia nollakohtansa vasemmalla puolella ja positiivisia oikealla puolella.

x		1		2		3	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



Parillinen määrä miinuksia tekijöissä: **+**
Pariton määrä miinuksia tekijöissä: **-**

Alkuperäinen epäyhtälö on tosi, kun $f(x) < 0$.

Kaavion perusteella tämä toteutuu, kun $x < 1$ tai $2 < x < 3$.