

Neliöjuuriyhtälön ratkaiseminen

- Neliöjuuren saa poistettua yhtälöstä korottamalla yhtälön puolittain neliöön, kun juurilauseke on yksin yhtälön toisella puolella.
- Tällöin pitää kuitenkin huomioida, että molempien puolien täytyy olla saman merkkisiä (≥ 0). Tätä ehtoa kutsutaan *neliöönkorotusehdoksi*.
 - Esimerkiksi epätosi yhtälö $1 = -1$ muuttuisi neliöön korottamalla yhtälöksi $1^2 = (-1)^2 \Leftrightarrow 1 = 1$, joka olisi aina tosi. Neliöönkorotusehto ei ole tässä voimassa.
 - Yleisemmin yhtälöstä $a = b$, seuraa aina $a^2 = b^2$, mutta yhtälöstä $a^2 = b^2$ ei välttämättä seuraa $a = b$, koska vaihtoehto $a = -b$ on myös mahdollinen. Neliöönkorotusehto rajaa tämän mahdollisuuden pois.
- Lisäksi täytyy huomioida myös neliöjuuren määrittelyehto.
 - Juurrettavan (juuren sisällä olevan lausekkeen) täytyy olla epänegatiivinen.

Korkeamman asteen juuriyhtälön ratkaiseminen

- Parillista astetta olevat juuriyhtälöt ratkaistaan vastaavalla tavalla kuin neliöjuuriyhtälöt. Neliöön korottamisen sijasta korotetaan juuren mukaiseen potenssiin.
 - Myös vastaava määrittelyehto on voimassa. Juuren sisällä olevan lausekkeen on oltava epänegatiivinen.
- Paritonta astetta oleva juuriyhtälö on yksinkertaisempi. Yhtälö voidaan aina korottaa parittomaan potenssin ja pariton juuri on määritelty kaikilla reaalityyppillä.
 - Esimerkiksi yhtälöllä $a^3 = b^3$ on ainoastaan ratkaisu $a = b$, joten voidaan merkitä $a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3$. Kolmanteen potenssin korotettu yhtälö on siis (lausekkeista a ja b riippumatta) yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön $a = b$ kanssa.

t. 726, s. 208

a) $\sqrt{x+1} = x-1$

Määrittelyehto: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Neliöönkorotusehto: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Molemmat ehdot ovat voimassa, kun $x \geq 1$. Korotetaan yhtälö puolittain neliöön.

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x+1 = x^2 - 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 3x$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$x = 0$ ei toteuta neliöönkorotusehtoa $x \geq 1$, joten yhtälön ainoa ratkaisu on $x = 3$.

Tarkistus: $\sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 = 3-1$

Huomaa, että vaihtoehto $x = 0$ antaisi tapauksen " $1 = -1$ ".

b) $\sqrt{x^2 + 6} = 2x \quad | \quad ()^2$ Neliöönkorotusehto: $2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Juurilauseke on määritelty kaikilla x :n arvoilla, koska parilliset potenssit eivät ole koskaan negatiivisia.

$$\left(\sqrt{x^2 + 6}\right)^2 = (2x)^2$$

$$x^2 + 6 = 4x^2$$

$$6 = 3x^2$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Miinusmerkkinen vaihtoehto ei toteuta neliöönkorotusehtoa $x \geq 0$, joten yhtälön ainoa ratkaisu on $x = \sqrt{2}$.

Tarkistus: $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 6} = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{x^3 - 16} = -x \quad | \quad ()^3$

Pariton juuri on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja yhtälön voi aina korottaa molemmin puolin parittomaan potenssiin.

$$\left(\sqrt[3]{x^3 - 16}\right)^3 = (-x)^3$$

$$x^3 - 16 = -x^3$$

$$2x^3 = 16$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Tarkistus: $\sqrt{2^3 - 16} = \sqrt{8 - 16} = \sqrt{-8} = -2$