

YO-tehtävä:
K2013/*14

Olkoon $P(x) = x^2 + x - 2$.

a) Jaa $P(x)$ ensimmäisen asteen tekijöihin. (2 p.)

b) Määritä sellaiset vakiot A ja B , että $\frac{1}{P(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ kaikilla $x \geq 2$. (2 p.)

c) Määritä funktion $\frac{1}{P(x)}$ integraalifunktiot, kun $x \geq 2$. (2 p.)

d) Laske epäoleellinen integraali $\int_2^{\infty} \frac{1}{P(x)} dx$. (3 p.)

a) Ratkaistaan polynomin P nollakohdat: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ tai $x = -2$. Tekijöihin jako on siis $P(x) = 1 \cdot (x - 1)(x - (-2)) = (x - 1)(x + 2)$.

a

b) Kyseessä on eräs integroimiskeino ns. *osamurtokehitemä*. Kaikilla $x \geq 2$ pätee:

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \overset{x+2}{A} \frac{1}{x-1} + \overset{x-1}{B} \frac{1}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax + 2A + Bx - B}{x^2 + x - 2} = \frac{x(A+B) + 2A - B}{x^2 + x - 2}$$

Vertaamalla osoittajia saadaan yhtälöpari: $\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases}$ (alkuperäisessä muodossa ei osoittajassa x-termiä)

Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $3A = 1$ eli $A = \frac{1}{3}$ ja edelleen sijoittamalla $B = -\frac{1}{3}$.

$$\text{Siis } \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} + C, \text{ kun } x \geq 2. \end{aligned}$$

d) Olkoon $s > 2$.

$$\begin{aligned} \int_2^s \frac{1}{P(x)} dx &= \frac{1}{3} \int_2^s \ln \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{3} \left(\ln \frac{s-1}{s+2} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \left(\ln \frac{s-1}{s+2} + \ln 4 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\ln \frac{1 - \frac{1}{s}}{1 + \frac{2}{s}} + \ln 4 \right) \rightarrow \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{2}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{Siis } \int_2^\infty \frac{1}{P(x)} dx = \frac{2}{3} \ln 2.$$

↘ $\ln 1 = 0$, kun $s \rightarrow \infty$