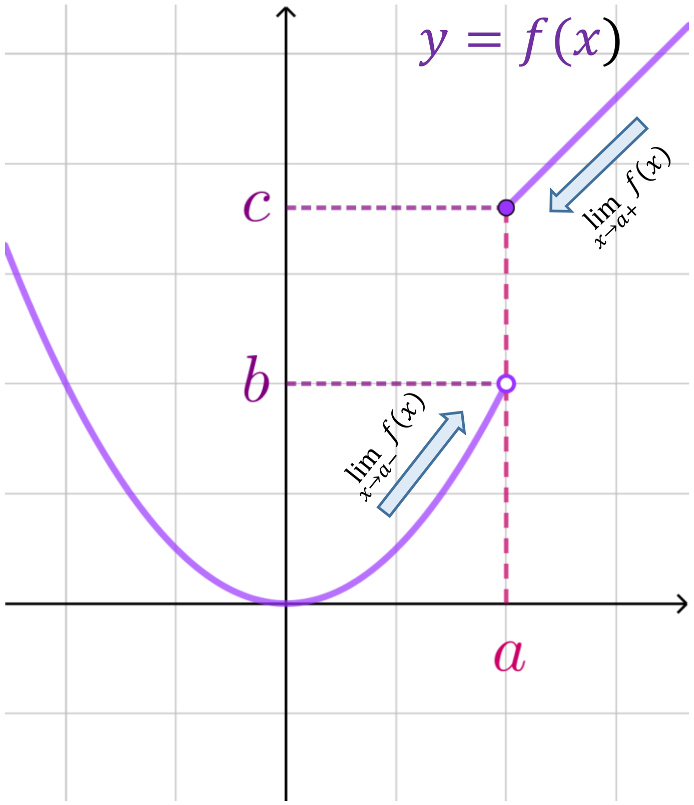
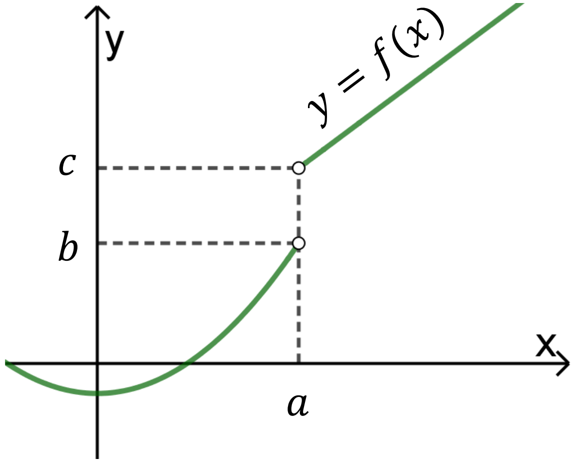
Toispuoliset raja-arvot

- Jos funktion f arvo lähestyy lukua b, kun x lähestyy kohtaa a vasemmalta, niin b on funktion f *vasemmanpuoleinen raja-arvo* kohdassa a ja merkitään $\lim_{x \to a-} f(x) = b$.
- Jos funktion f arvo lähestyy lukua c, kun x lähestyy kohtaa a oikealta, niin c on funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* kohdassa a ja merkitään $\lim_{x \to a+} f(x) = c$.
- Vasemman- ja oikeanpuoleisia raja-arvoja sanotaan toispuolisiksi raja-arvoiksi.
- Funktiolla on raja-arvo $\lim_{x \to a} f(x) = b$, jos ja vain jos toispuoliset raja-arvot kohdassa $x = a$ ovat olemassa ja

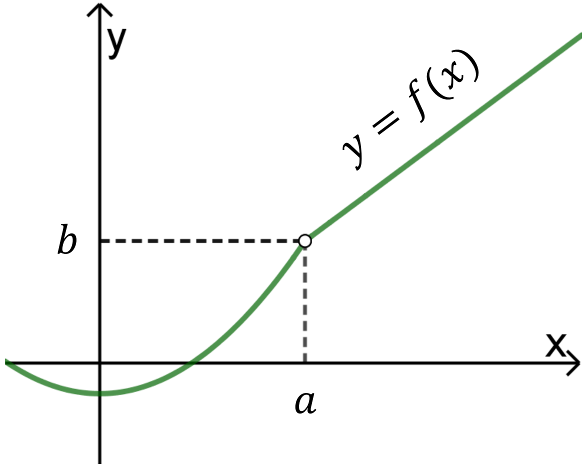
$$\lim_{x \to a-} f(x) = b = \lim_{x \to a+} f(x).$$





$$\lim_{x\to a-} f(x) = b \neq \lim_{x\to a+} f(x) = c$$

Toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, joten funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa a.



$$\lim_{x\to a-} f(x) = b = \lim_{x\to a+} f(x)$$

Toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret, joten funktiolla f on raja-arvo b kohdassa a.

t. 125, s. 31

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 6, & \text{kun } x < 6 \\ 10, & \text{kun } x = 6 \\ \dfrac{x^2 - 36}{x - 6}, & \text{kun } x > 6 \end{cases}$$

a) $f(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6$ ja $f(6) = 10$

b) Ensimmäinen raja-arvo voidaan laskea suoraan:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (3x - 6) = 3 \cdot 0 - 6 = -6$$

Funktio f on (polynomifunktiona) jatkuva alueessa $x < 6$, joten raja-arvo on sama kuin funktion arvo $f(0) = -6$.

Kun lasketaan paloittain määritellyn funktion raja-arvoa ”lausekkeiden rajalla”, täytyy laskea ensin toispuoliset raja-arvot:

$$\lim_{x \to 6-} f(x) = \lim_{x \to 6-} (3x - 6) = 3 \cdot 6 - 6 = 12$$

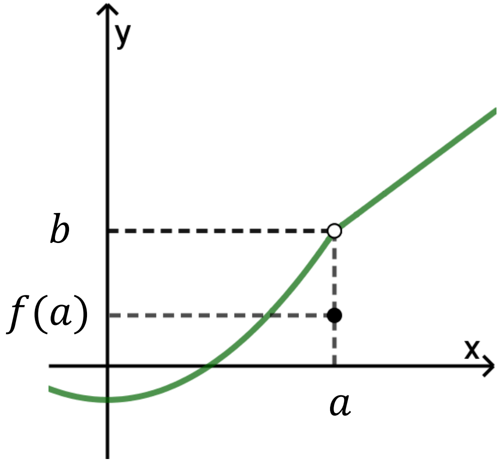
$$\lim_{x \to 6+} f(x) = \lim_{x \to 6+} \frac{x^2 - 36}{x - 6} = \lim_{x \to 6+} \frac{(x + 6)(x - 6)}{x - 6} = \lim_{x \to 6+} (x + 6) = 6 + 6 = 12$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuria, raja-arvo $\lim_{x \to 6} f(x) = 12$ on olemassa.

Huom! Raja-arvon kannalta ei ole merkitystä, että $f(6) = 10 \neq 12 = \lim_{x \to 6} f(x)$. ($f$ ei siis ole jatkuva kohdassa $x = 6$.)

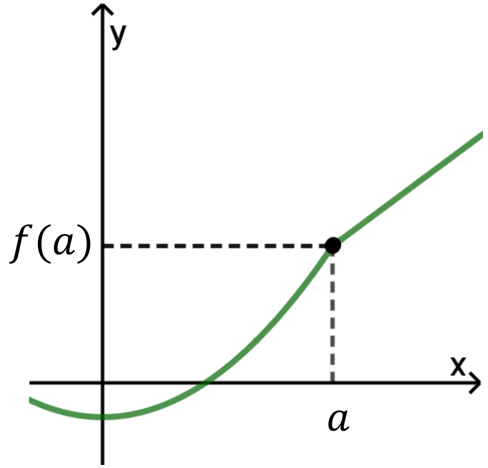
Jatkuvuus

- Jatkuvuus määritellään täsmällisesti raja-arvon avulla:
- Funktio f on jatkuva kohdassa $x = a$, jos $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.



$$\lim_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$$

Funktio f ei ole jatkuva kohdassa $x = a$.



$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = a$.

- Funktio on jatkuva, jos se on jatkuva kaikissa määrittelyjoukkonsa pisteissä.
- *Funktio on jatkuva kaikkialla*, jos se on jatkuva (ja määritelty) reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$.
- Polynomi-, rationaali-, juuri-, potenssi-, eksponentti-, logaritmi ja trigonometriset funktiot sekä näiden yhdistetyt funktiot ovat jatkuvia.
- Paloittain määritellyille funktioille jatkuvuus pitää tarkistaa toispuolisia raja-arvoja käyttäen kohdassa, jossa funktion lauseke vaihtuu.

t. 134, s. 32

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x < 3 \\ \sqrt{4x-8}, & x \geq 3 \end{cases}$$

Funktiolla f on raja-arvo kohdassa $x = 3$, jos sen toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuret.

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} (2^x + a) = 2^3 + a = 8 + a$$

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} \sqrt{4x-8} = \sqrt{4 \cdot 3 - 8} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \quad 8 + a = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -6$$

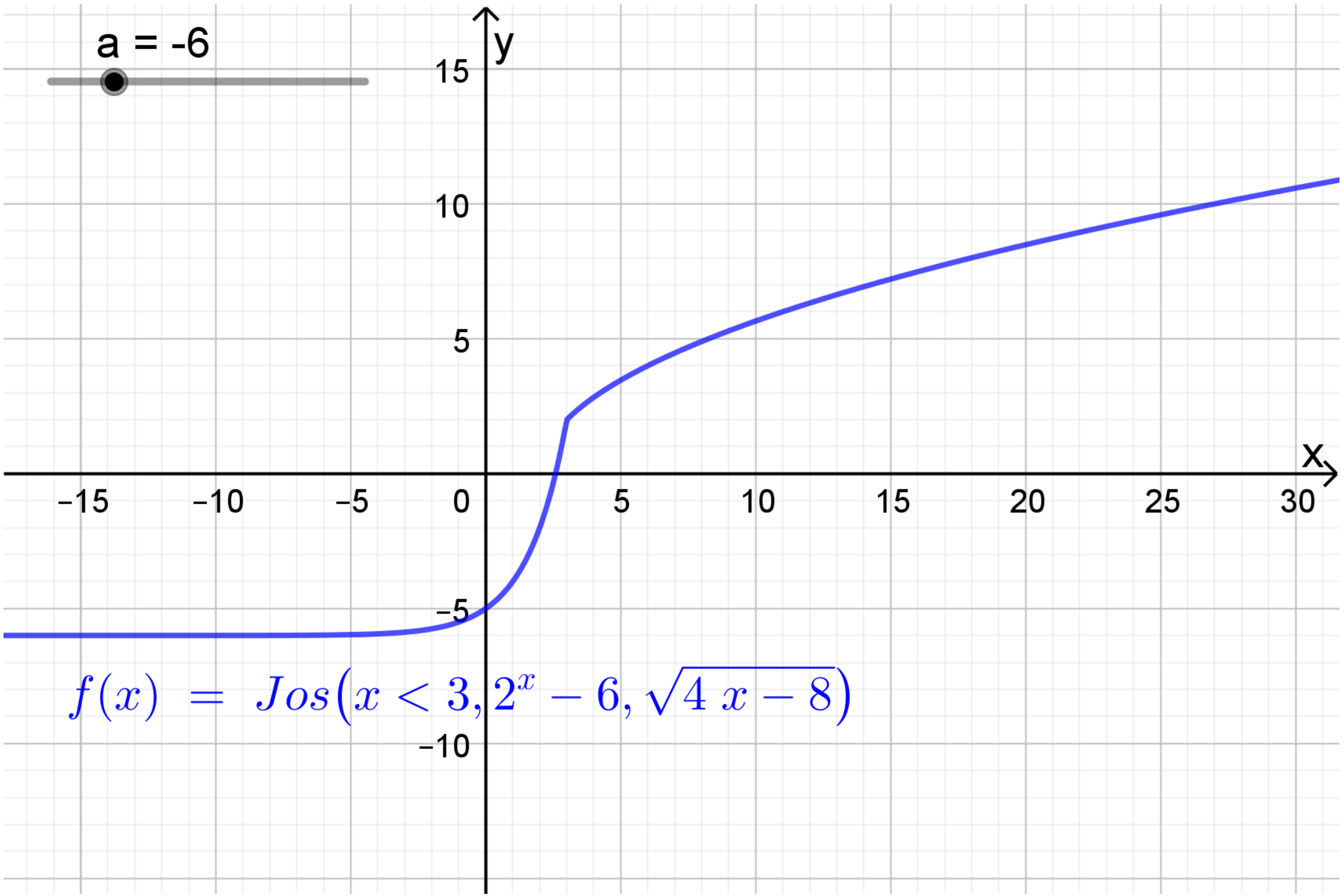
Siis vakion arvolla $a = -6$ funktion f raja-arvo kohdassa $x = 3$ on 2.

Funktio on jatkuva kohdassa $x = 3$, sillä funktion arvo $f(3) = \sqrt{4 \cdot 3 - 8} = 2$ on sama kuin raja-arvo

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2.$

Funktio f on eksponenttifunktiona jatkuva, kun $x < 3$, ja juuri- ja polynomifunktion yhdistettynä funktiona jatkuva, kun $x > 3$.

Funktio f on siis (kaikkialla) jatkuva.


a = -6
y
x
15
10
5
0
−5
−10
−15
−10
−5
5
10
15
20
25
30
$f(x) = Jos(x < 3, 2^x - 6, \sqrt{4x - 8})$