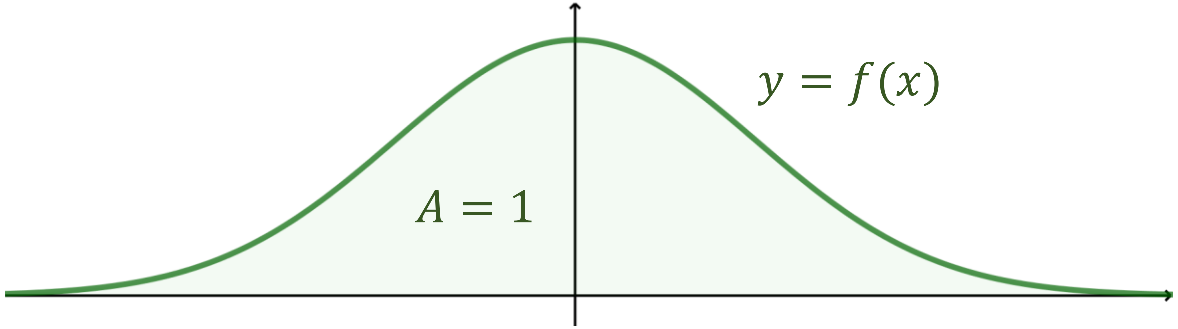
Tiheysfunktio

- *Tiheysfunktio* on funktio, jonka arvot ovat epänegatiivisia ja se rajaa x −akselin kanssa alueen, jonka pinta-ala on 1.
- Tiheysfunktion f täytyy siis toteuttaa seuraavat ehdot:

1. $f(x) \geq 0$ kaikilla x:n arvoilla.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$



- Tiheysfunktio voidaan liittää jatkuvasti jakautuneeseen satunnaismuuttujaan X siten, että sopivan tiheysfunktion f tietyllä välillä $[a, b]$ rajaama pinta-ala määrittää todennäköisyyden sille, että satunnaismuuttujan arvo on kyseisellä välillä:

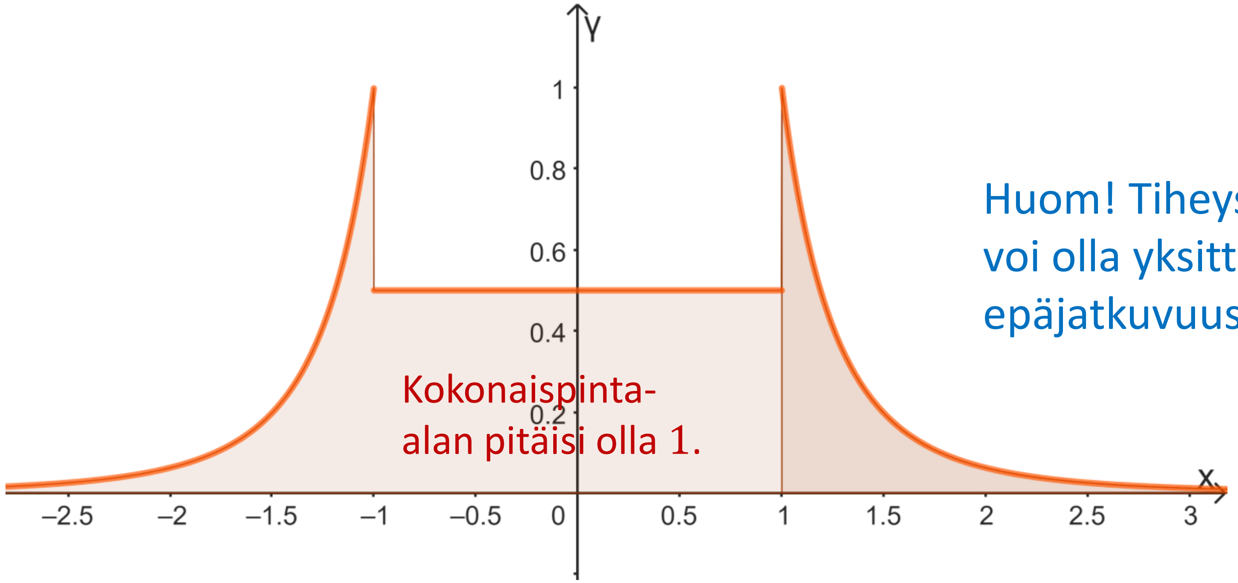
$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

t. 305, s. 110

Hahmotellaan kuva tiheysfunktiosta GeoGebralla:

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{Jos}\left(x > 1 \vee x < -1,\ \frac{1}{x^4},\ a\right)$$

Välillä $-1 \leq x \leq 1$, funktion arvo a on toistaiseksi tuntematon. (Kuvassa arvoksi valittu liukusäätimellä $a = 0.5$)



Huom! Tiheysfunktiolla voi olla yksittäisiä epäjatkuvuuskohtia.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^4}, \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ a, \text{kun } -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

Funktio f on *parillinen funktio* eli $f(x) = f(-x)$ kaikilla x:n arvoilla. Parillisen funktion kuvaaja on symmetrinen y −akselin suhteen, joten riittää tarkastella funktiota vain alueessa $x \geq 0$.

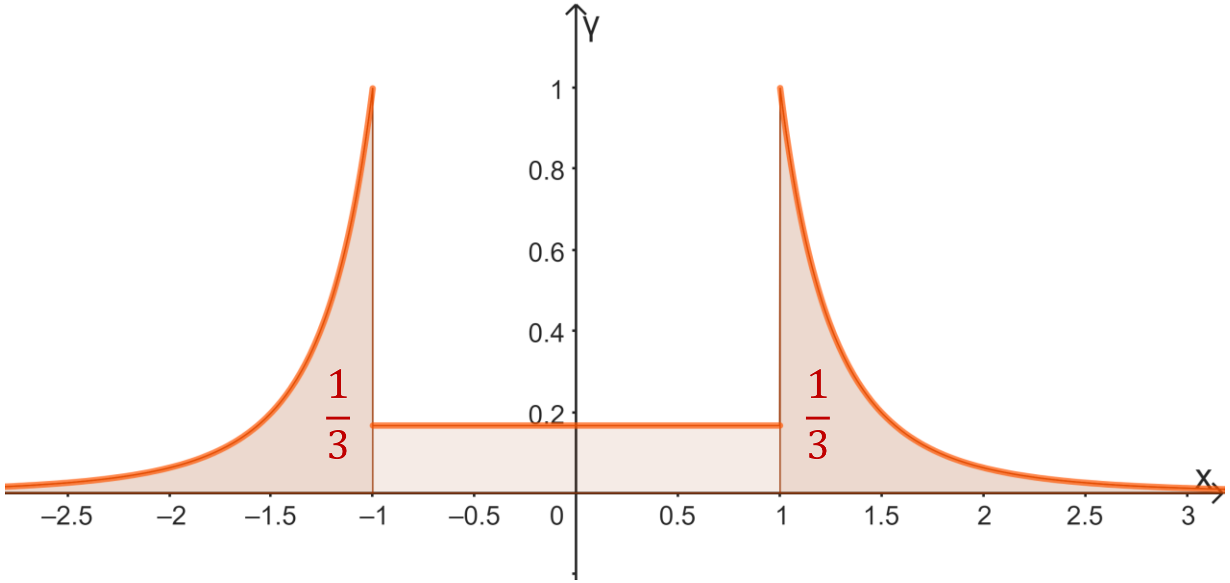
Lasketaan ensin (laskinohjelmalla) epäoleellinen integraali $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{3}$.

Välivaiheet malliksi: $\int_1^t \frac{1}{x^4}\,dx = \int_1^t x^{-4}\,dx = \Big/_{1}^{t} \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} = -\frac{1}{3} \Big/_{1}^{t} x^{-3} = \frac{1}{3} \Big/_{t}^{1} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{t^3})$

Siis $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{t^3}\right) = \frac{1}{3}$

ja symmetrian perusteella myös

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{3}.$$



Välillä $-1 \le x \le 1$ tiheysfunktion täytyy myös rajata pinta-ala $\frac{1}{3}$, jotta kokonaispinta-ala olisi 1.

Koska välin pituus on 2, pinta-alaehto toteutuu, kun $a = \frac{1}{6}$.

Tiheysfunktio on siis $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^4}, \text{kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ \frac{1}{6}, \text{kun } -1 \le x < 1 \end{cases}$

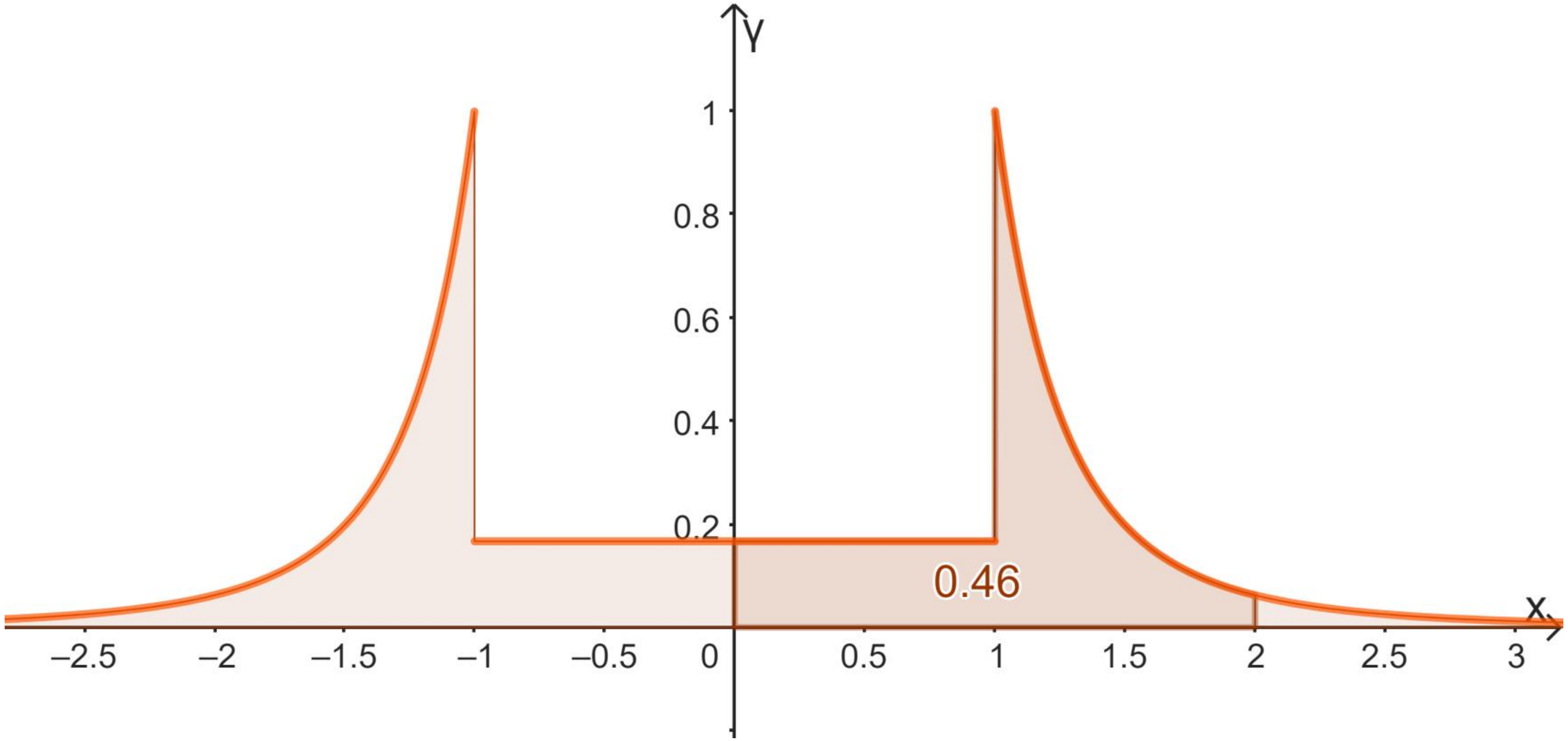
Lasketaan todennäköisyys osissa: $P(0 < X \le 2) = P(0 \le X \le 1) + P(1 \le X \le 2) = \frac{1}{6} + \int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx.$

Huom! Päätepisteiden mukanaolo ei vaikuta todennäköisyyteen.

Laskinohjelmalla saadaan todennäköisyydeksi

$$P(0 < X \leq 2) = \frac{11}{24} \; (\approx 0{,}46).$$

$$\frac{1}{6} + \int_1^2 \frac{1}{x^4} \, \mathrm{d}x \qquad \frac{11}{24}$$



Odotusarvo ja keskihajonta

- Tiheysfunktion avulla voidaan määrittää jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan X odotusarvo μ ja keskihajonta σ.
- Diskreetin jakauman pistetodennäköisyyksiä vastaa nyt tiheysfunktion arvo ja summa korvautuu integraalilla.
- Odotusarvo: $E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
- Keskihajonta: $D(X) = \sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx}$

Laske integraalit laskinohjelmalla!