t. 237, s. 84

$$f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$$

f on määritelty kaikilla reaaliluvuilla, koska $x^2+1>0$.

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

$$D\frac{f}{g}=\frac{f'g-g'f}{g^2}$$

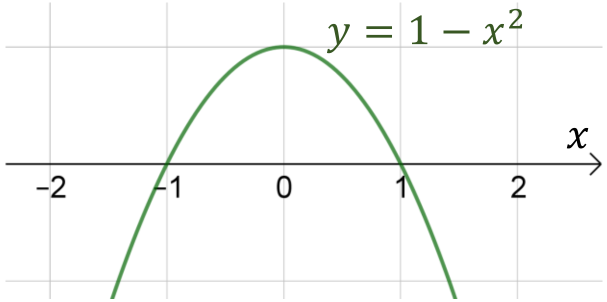
$$f'(x)=\frac{(6x+1)(x^2+1)-2x(3x^2+x+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{6x^3}+\cancel{6x}+x^2+1-\cancel{6x^3}-2x^2-\cancel{6x}}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Derivaatan merkki (ja nollakohdat) määräytyvät osoittajan perusteella, koska nimittäjä on aina positiivinen.

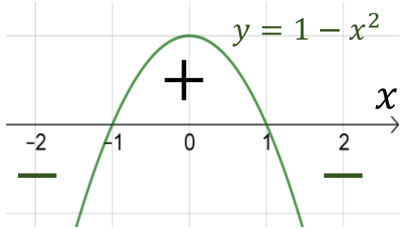
$$f'(x)=0 \iff 1-x^2=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm 1$$



Merkit saa toki myös testipisteillä (SpeedCrunch).

Tehdään kulkukaavio.

	-1		1	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	↘	↗	↘	
	min		max	



Funktiolla f on siis paikallinen minimi kohdassa $x = -1$ ja paikallinen maksimi kohdassa $x = 1$.

Minimiarvo on $f(-1) = \dfrac{3 \cdot (-1)^2 - 1 + 3}{(-1)^2 + 1} = \dfrac{5}{2}$.

Maksimiarvo on $f(1) = \dfrac{3 \cdot 1^2 + 1 + 3}{1^2 + 1} = \dfrac{7}{2}$.

Muista että minimit ja maksimit ovat vain paikallisia ääriarvoja, ei välttämättä funktion suurimpia tai pienimpiä arvoja!

Lasketaan funktion f raja-arvot kun $x \longrightarrow \infty$ tai $x \longrightarrow -\infty$.

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} = \frac{\cancel{x^2}\left(3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(3 + \overset{0}{\frac{1}{x}} + \overset{0}{\frac{3}{x^2}}\right)}{\left(1 + \underset{0}{\frac{1}{x^2}}\right)} \longrightarrow 3, \quad \text{kun } x \longrightarrow \infty \text{ tai } x \longrightarrow -\infty.$$

Raja-arvojen perusteella funktio f saa suurimman arvonsa maksimikohdassa ja pienimmän arvon minimikohdassa.

Funktion f suurin arvo on siis $f(1) = \frac{7}{2}$ ja pienin arvo $f(-1) = \frac{5}{2}$.