t. 185, s. 54

Ratkaisu ensin ilman laskinohjelmistoja:

Koska $f(x) = e^{2x-x^2} > 0$ kaikilla x:n arvoilla, saadaan pinta-ala integraalina $\int_a^{a+1} f(x)d(x)$.

Pinta-ala A on muuttujan a funktio

$$A(a) = \int_a^{a+1} f(x)d(x) = F(a+1) - F(a),$$

missä F on funktion f (mikä tahansa) integraalifunktio eli $F'(x) = f(x)$.

Etsitään pinta-alafunktion A suurin arvo derivaatan avulla.

$$A'(a) = D\int_a^{a+1} f(x)d(x) = DF(a+1) - DF(a),$$

$$= f(a+1) - f(a)$$

Sisäfunktion derivaatta pitää yleisesti huomioida, vaikka tässä se on 1:

$DF(a+1) = F'(a+1)D(a+1) = f(a+1) \cdot 1 = f(a+1)$

Sievennetään derivaatan $A'(a) = f(a+1) - f(a)$ lauseketta ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$A'(a) = e^{2(a+1)-(a+1)^2} - e^{2a-a^2} = e^{2a+2-a^2-2a-1} - e^{2a-a^2}$$

$$= e^{1-a^2} - e^{2a-a^2}$$

$$= \frac{e}{e^{a^2}} - \frac{e^{2a}}{e^{a^2}} = \frac{e - e^{2a}}{e^{a^2}} = 0$$

Derivaatan nollakohta saadaan osoittajasta. Nimittäjä on aina positiivinen, joten derivaatta on määritelty kaikilla a:n arvoilla.

$$A'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e - e^{2a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2a} = e \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Tutkitaan testipisteillä derivaatan merkkiä nollakohdan molemmin puolin:

$$A'(0) = \frac{e - e^0}{e^0} = e - 1 > 0 \quad \text{ja} \quad A'(1) = \frac{e - e^2}{e^1} = 1 - e < 0$$

Derivaatalla on siis vain yksi nollakohta, jossa derivaatan merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi. Tässä kohdassa on siis pinta-alan paikallinen maksimi, joka on myös pinta-alafunktion suurin arvo.

Kulkukaavion voi tietysti myös tehdä.

Vastaus: Pinta-ala on suurimmillaan, kun $a = \frac{1}{2}$.

Ratkaisu laskinohjelmistolla:

$f(x):=\mathbf{e}^{2\cdot x-x^2}$	*Valmis*
$g(a):=\int_a^{a+1} f(x)\, dx$	*Valmis*
$g(a)$	$\int_a^{a+1} \mathbf{e}^{2\cdot x-x^2}\, dx$
$h(a):=\frac{d}{da}(g(a))$	*Valmis*
$h(a)$	$(\mathbf{e}-\mathbf{e}^{2\cdot a})\cdot \mathbf{e}^{-a^2}$
$\text{solve}(h(a)=0,a)$	$a=\frac{1}{2}$
$h(0.4)$	0.419886097476
$h(0.6)$	-0.419886097476

Tässä pinta-alafunktio on g ja sen derivaatta h.

Huomaa, että laskinfunktio ei osaa algebrallisesti integroida pinta-alafunktion lauseketta, koska sitä ei ole mahdollista esittää perusfunktioiden avulla. Tätä lauseketta ei tehtävässä tarvitakaan ratkaistussa muodossa.

Tuloksen voi päätellä kuvaajan symmetriasta (kuva ei kuitenkaan kelpaa perusteluksi) ja tarkistaa myös liukusäätimen avulla: