t. 174, s. 52

Esitetään itseisarvo paloittain määriteltynä funktiona:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{kun } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{kun } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x-1, \text{kun } x \geq 1 \\ -x+1, \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

Integroidaan funktio f erikseen väleillä $x > 1$ ja $x < 1$. (Kohta $x = 1$ tarkastellaan erikseen.)

Kun $x > 1$: $F(x) = \int (x-1)dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$

Kun $x < 1$: $F(x) = \int (-x+1)dx = -\frac{1}{2}x^2 + x + D$ Muista käyttää (aluksi) kahta eri integroimisvakiota!

Koska integraalifunktio F on derivoituva ($F' = f$), niin sen täytyy olla jatkuva.

F on jatkuva, kun $x \neq 1$, koska se on paloittain määritelty polynomifunktioina. Riittää siis tarkastella jatkuvuutta kohdassa $x = 1$ toispuolisten raja-arvojen avulla.

$$\lim_{x \to 1+} F(x) = \lim_{x \to 1+} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + C \right) = -\frac{1}{2} + C$$

$$\lim_{x\to 1-} F(x) = \lim_{x\to 1-}\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + D\right) = \frac{1}{2} + D$$

Raja-arvo $\lim_{x\to 1} F(x)$ on olemassa, kun toispuoliset raja-arvot ovat yhtä suuria eli ehdolla

$$\lim_{x\to 1} F(x) = -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} + D \quad \Leftrightarrow \quad D = C - 1.$$

Integraalifunktiosta saadaan kaikkialla jatkuva, kun $F(1) = \lim_{x\to 1} F(x) = -\frac{1}{2} + C$.

Funktion arvo lausekkeiden rajalla kohdassa $x = 1$ voidaan määrittää kumman tahansa lausekkeen mukaisesti, koska molemmat lähestyvät nyt samaa arvoa $-\frac{1}{2} + C$.

Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat siis muotoa

$$F(x) = \int |x-1|dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C, & \text{kun } x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + C - 1, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

Ehto $F(-1) = 0$ toteutuu, jos $F(-1) = -\frac{1}{2}(-1)^2 + (-1) + C - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C - \frac{5}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{5}{2}.$

Integraalifunktioksi saadaan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, & \text{kun } x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$