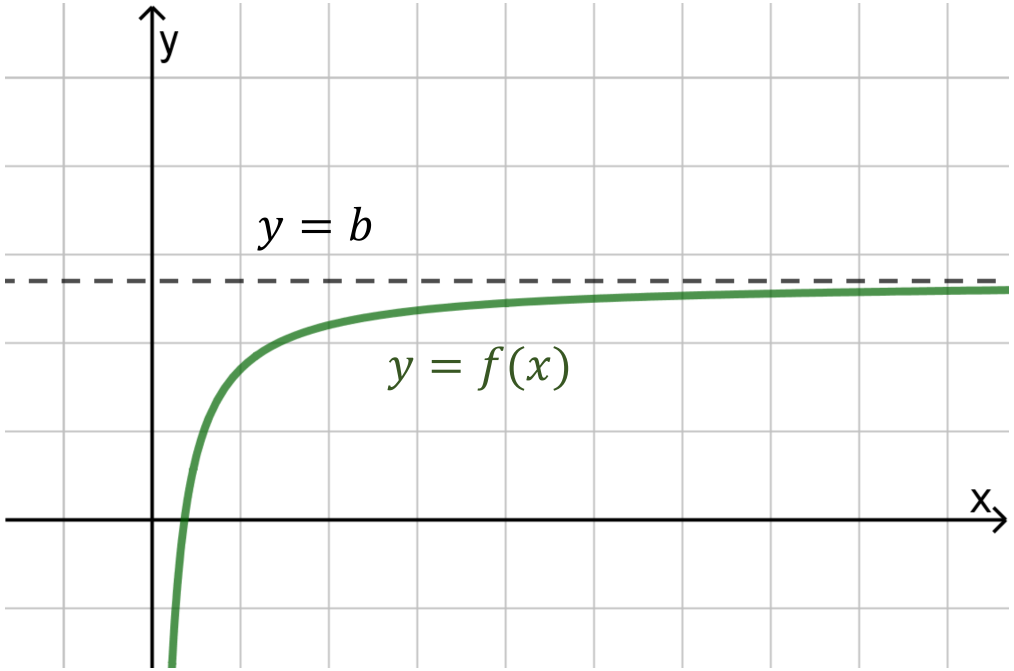
Raja-arvo äärettömyydessä

- Jos funktion arvot lähestyvät lukua b, kun x kasvaa rajatta, niin merkitään

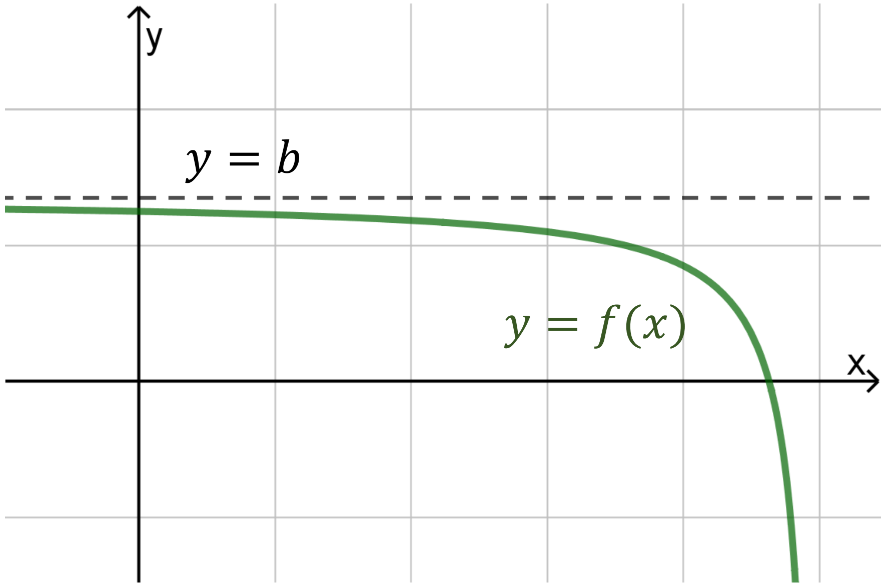
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$



Funktion f arvot lähestyvät rajatta (mutta koskaan saavuttamatta) lukua b.

Suora $y = b$ on käyrän $y = f(x)$ vaakasuora *asymptootti*.

- Vastaavalla tavalla raja-arvo voi olla miinus äärettömässä: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$



- Jos funktion f arvo kasvaa rajatta, niin funktiolla f on äärettömyydessä *epäoleellinen raja-arvo* ääretön:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

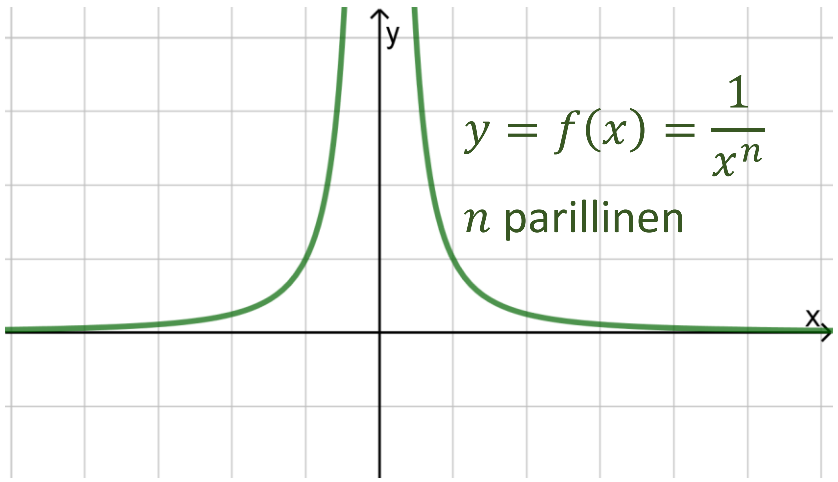
- Samaan tapaan voidaan merkitä muutkin epäoleelliset raja-arvot:

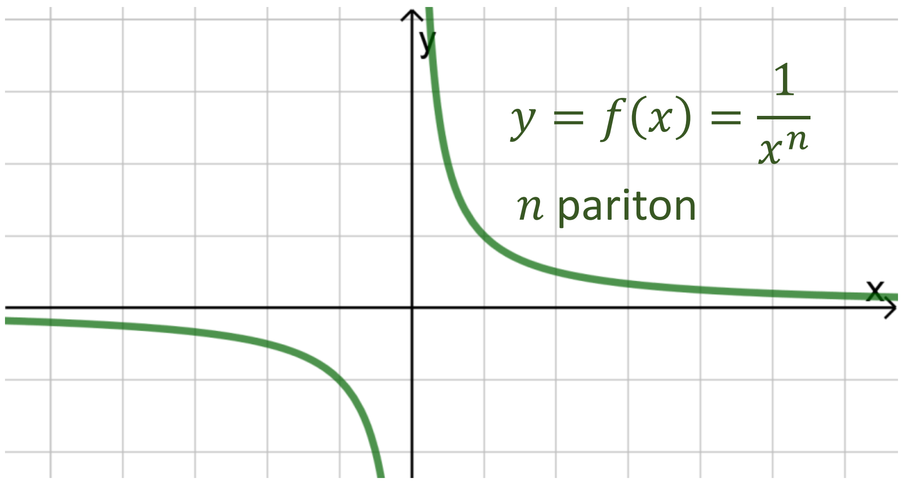
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ ja } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$

- Funktion lauseketta täytyy usein muokata, jotta mahdollinen raja-arvo äärettömyydessä voidaan laskea
- Apuna voidaan käyttää esim. seuraavia tuloksia:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad \text{kun } n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \geq 1.$$

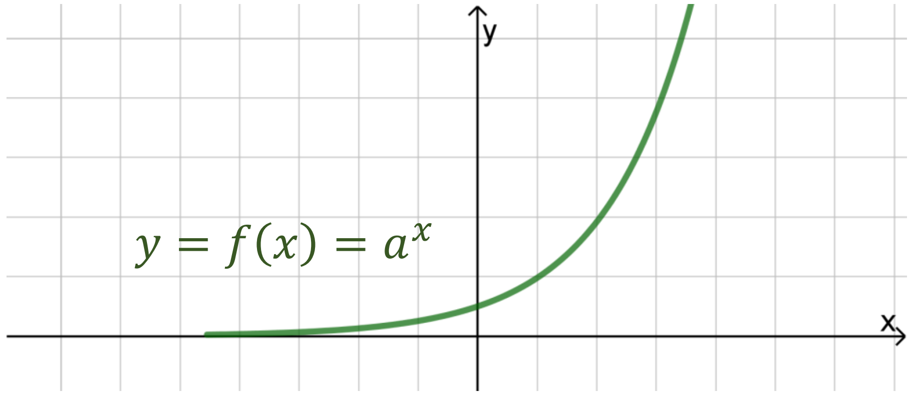
Laskuissa pyritään muokkaamaan lausekkeisiin muotoa $\frac{1}{x^n}$ olevia termejä!





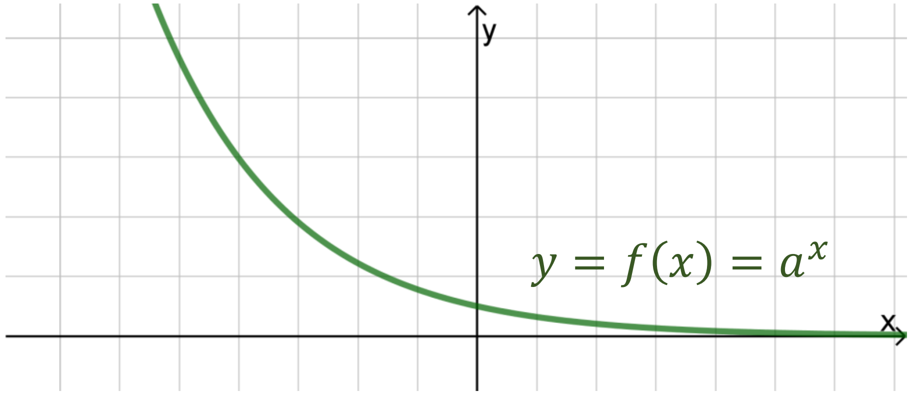
- Kun $a > 1$, niin

  $$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$



- Kun $0 < a < 1$, niin

  $$\lim_{x \to \infty} a^x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty.$$



t. 224, s. 82

a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{2x+1} = 0$$

Lauseke lähestyy muotoa "$\frac{3}{\infty} = 0$"

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\frac{1}{x} - 2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 2} = -\frac{1}{2}$$

0

Otetaan nimittäjän korkein potenssi tekijäksi sekä nimittäjässä, että osoittajassa.

Huom! $\frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow 0$, kun $x \longrightarrow \infty$, jos

Q on korkeampaa astetta kuin P.

Jos taas P on korkeampaa astetta kuin Q,

niin $\frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow \infty$ tai $\frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow -\infty$, kun $x \longrightarrow \infty$.

Lausekkeen (funktion) käyttäytyminen suurilla x:n arvoilla kannattaa varmistaa SpeedCrunchilla ainakin kokeen A-osassa.

```
f(x)=x/(1-2x)

f(10^6)
= -0,500 000 250 000 125 000 06
```

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}^2(1-\frac{5}{x})}{\cancel{x}^2(2+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

0

0

Tuloksen voi nähdä myös suoraan polynomien korkeimman asteluvun termeistä. Kun x on hyvin suuri, niin alemman asteluvun termien merkitys on hyvin pieni:

$$\frac{x^2-5x}{2x^2+x}\to\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

t. 232, s. 83

a) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{2^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2}^x}{\cancel{2}^x(1-\frac{1}{2^x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2^x}}=1$$

0

Tässäkin tuloksen näkee suoraan, koska suurilla x:n arvoilla vakion -1 merkitys on olematon:

$$\frac{2^x}{2^x-1}\to\frac{2^x}{2^x}=1$$

b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e}^x(1+\frac{1}{e^x})}{\cancel{e}^x\cdot e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{e^x}=0$$

0

∞

"$\frac{1}{\infty}=0$"

c) $$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x}=0$$

Tässä osoittaja lähestyy nollaa ja nimittäjä ääretöntä, joten myös osamäärä lähestyy (hyvin nopeasti) nollaa.