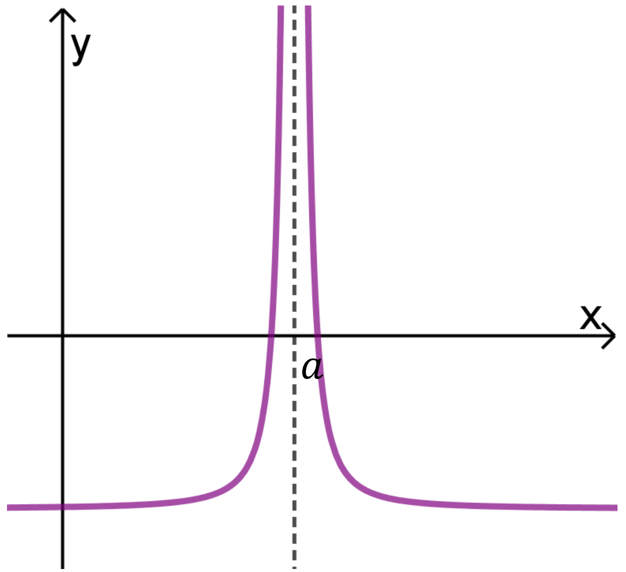
Raja-arvo ääretön

- Jos funktion arvo $f(x)$ kasvaa rajatta, kun x lähestyy lukua a molemmilta puolilta, niin funktiolla on *epäoleellinen raja-arvo* ääretön

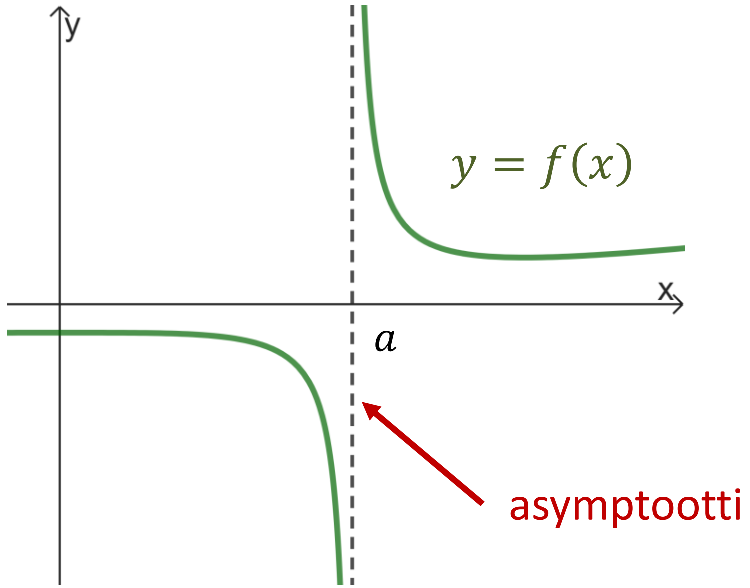


$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

- Vastaavasti, jos funktion arvo $f(x)$ vähenee rajatta, kun $x \longrightarrow a$, niin epäoleellinen raja-arvo on miinus ääretön

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

- Alla olevan kuvaajan mukaisella funktiolla f ei ole raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa kohdassa $x = a$, mutta toispuoliset epäoleelliset raja-arvot voidaan määrittää:



$$\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$$

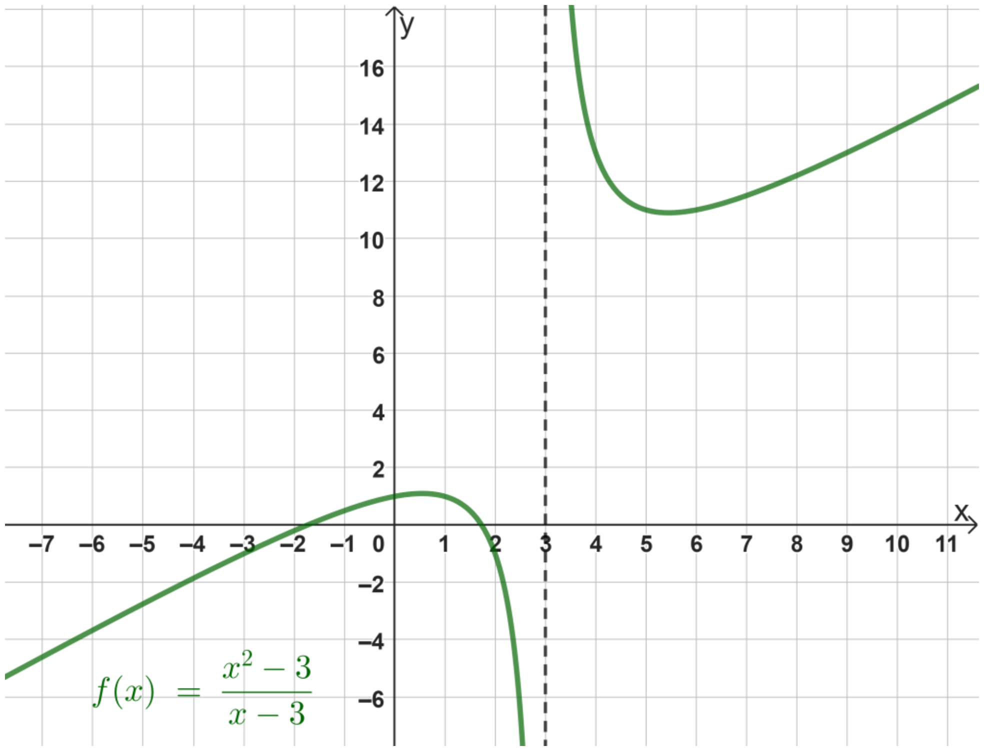
$$\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$$

- Kohdassa a, jossa funktiolla on epäoleellinen tai toispuolinen epäoleellinen raja-arvo, funktion arvot lähestyvät (koskaan kuitenkaan saavuttamatta) pystysuoraa $x = a$
- Tätä suoraa kutsutaan funktion kuvaajan *pystysuoraksi asymptootiksi*.

t. 208, s. 67

a) Raja-arvoa ei ole olemassa, koska nimittäjä $x - 3 \to 0$ ja osoittaja $x^2 - 3 \to 3^2 - 3 = 6$, kun $x \to 3$.

Lausekkeella on kuitenkin epäoleellinen oikeanpuoleinen raja-arvo ääretön, koska nimittäjä on oikealta puolelta lähestyttäessä aina positiivinen.



$$\lim_{x \to 3+} \frac{x^2 - 3}{x - 3} = \infty$$

Koska $\lim_{x \to 3-} \frac{x^2 - 3}{x - 3} = -\infty$, epäoleellista raja-arvoa

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3}{x - 3}$ ei ole määritelty.

b) Puretaan ensin itseisarvo paloittain määritellyksi funktioksi.

$$|2x-8| = \begin{cases} 2x-8, \text{kun } 2x-8 \geq 0 \\ -(2x-8), \text{kun } 2x-8 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-8, \text{kun } x \geq 4 \\ -(2x-8), \text{kun } x < 4 \end{cases}$$

Lasketaan sitten toispuoliset raja-arvot:

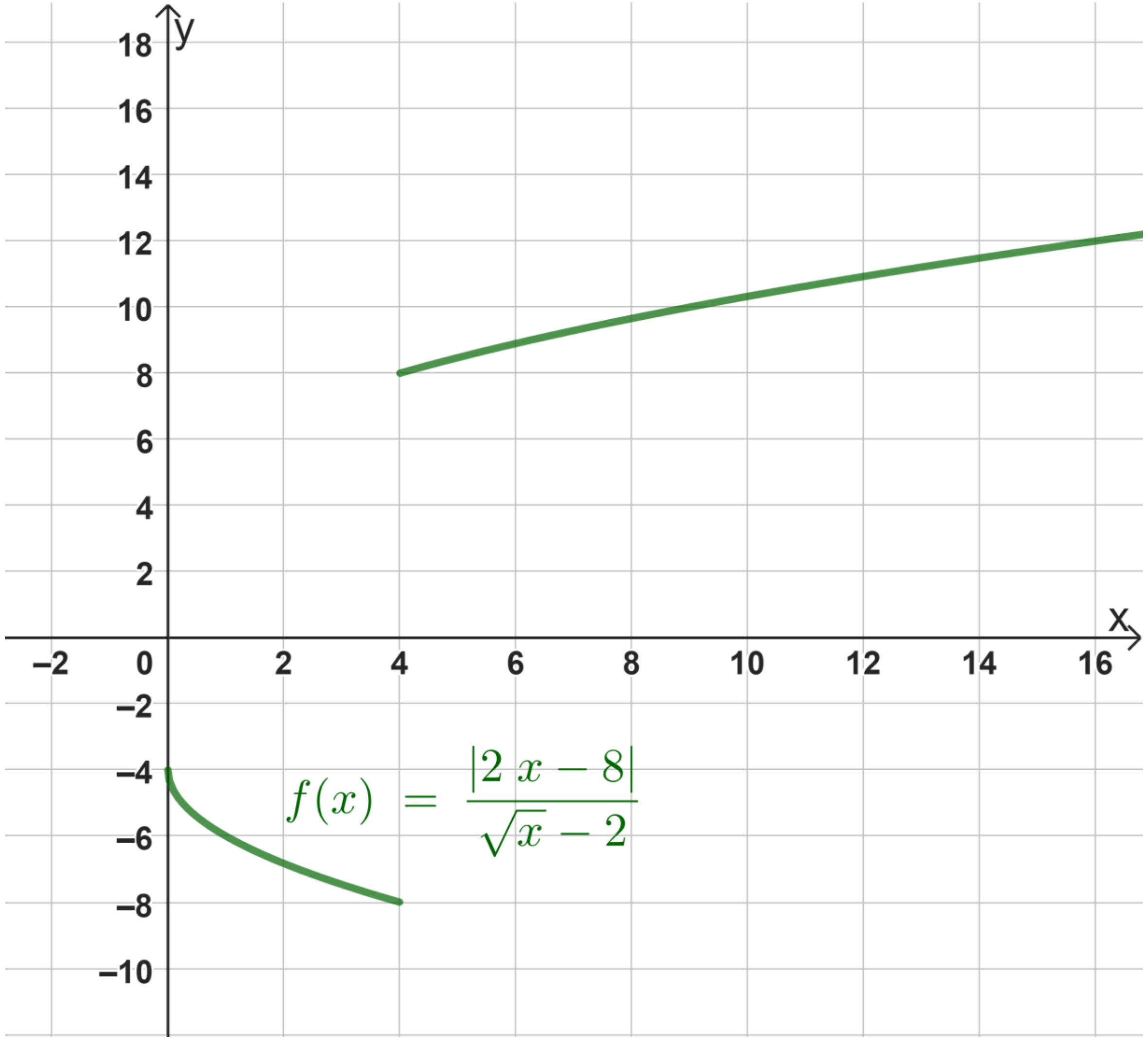
$$\lim_{x \to 4+} \frac{|2x-8|}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4+} {}^{\sqrt{x}+2)}\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4+} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4+} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \to 4+} 2(\sqrt{x}+2) = 8$$

$$\lim_{x \to 4-} \frac{|2x-8|}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4-} {}^{\sqrt{x}+2)}\frac{-(2x-8)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4-} \frac{-2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 4-} \frac{-2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \to 4-} -2(\sqrt{x}+2) = -8$$

Toispuoliset raja-arvot ovat eri suuria, joten raja-arvoa ei ole olemassa.



c) Lauseke lähestyy muotoa $\frac{e^0+1}{e^0-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0}$, joten raja-arvoa ei ole olemassa.
Tarkastellaan vielä toispuolisten raja-arvojen avulla, onko epäoleellinen raja-arvo olemassa.

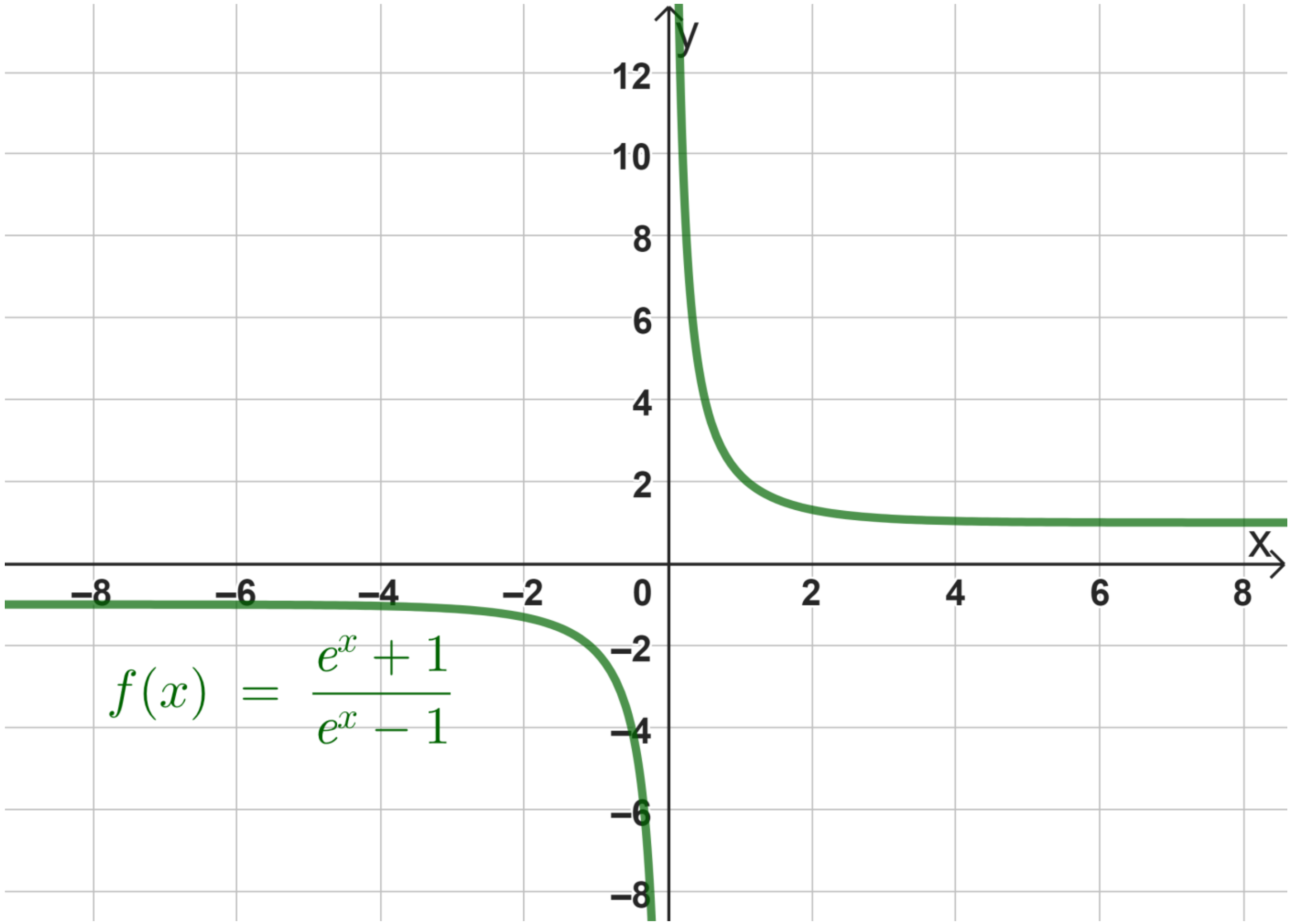
$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x+1}{e^x-1} = \infty,$$

koska osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia, kun $x > 0$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^x+1}{e^x-1} = -\infty,$$

koska osoittaja on positiivinen ja nimittäjä negatiivinen, kun $x < 0$

Siis lausekkeella ei ole myöskään epäoleellista raja-arvoa.

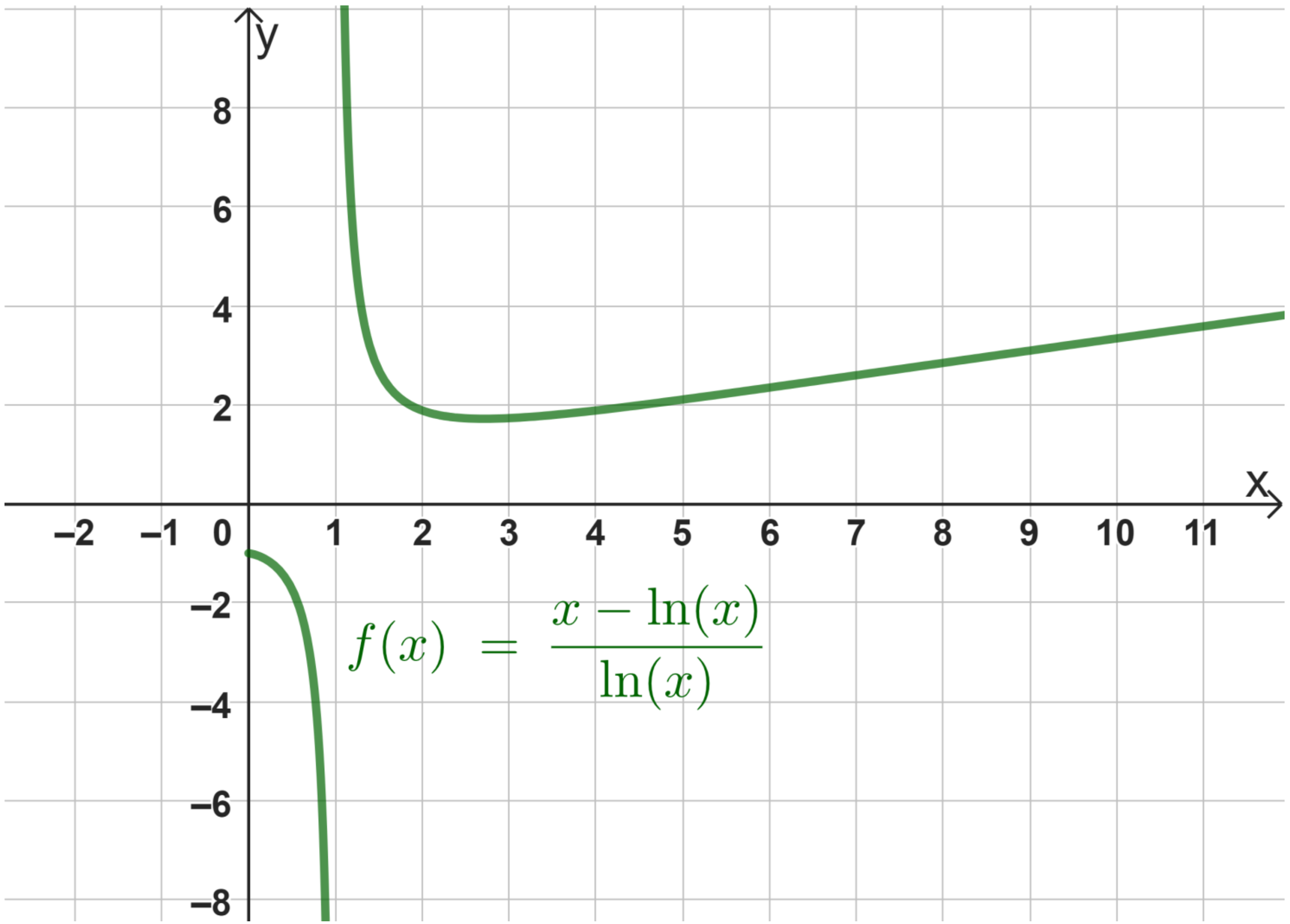


d) $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{x - \ln x}{\ln x} = -\infty$

Perustelu:

Lauseke lähestyy muotoa " $-\frac{1}{0}$ ".

Osoittaja lähestyy lukua $1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$ ja nimittäjä on vasemmalta puolelta kohtaa $x = 1$ lähestyttäessä negatiivinen, koska $\ln x < 0$, kun $0 < x < 1$.



t. 219, s. 69

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)$$

1. virhe: Epäoleellisia raja-arvoja laskettaessa ei olla huomioitu nollaa lähestyvän nimittäjän merkkiä.

Korjaus:

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\underbrace{x-1}_{<0,\to 0}}=-\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 1-}\frac{1}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0,\to 0}}=\infty$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{\underbrace{x-1}_{>0,\to 0}}=\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 1+}\frac{1}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0,\to 0}}=\infty$$

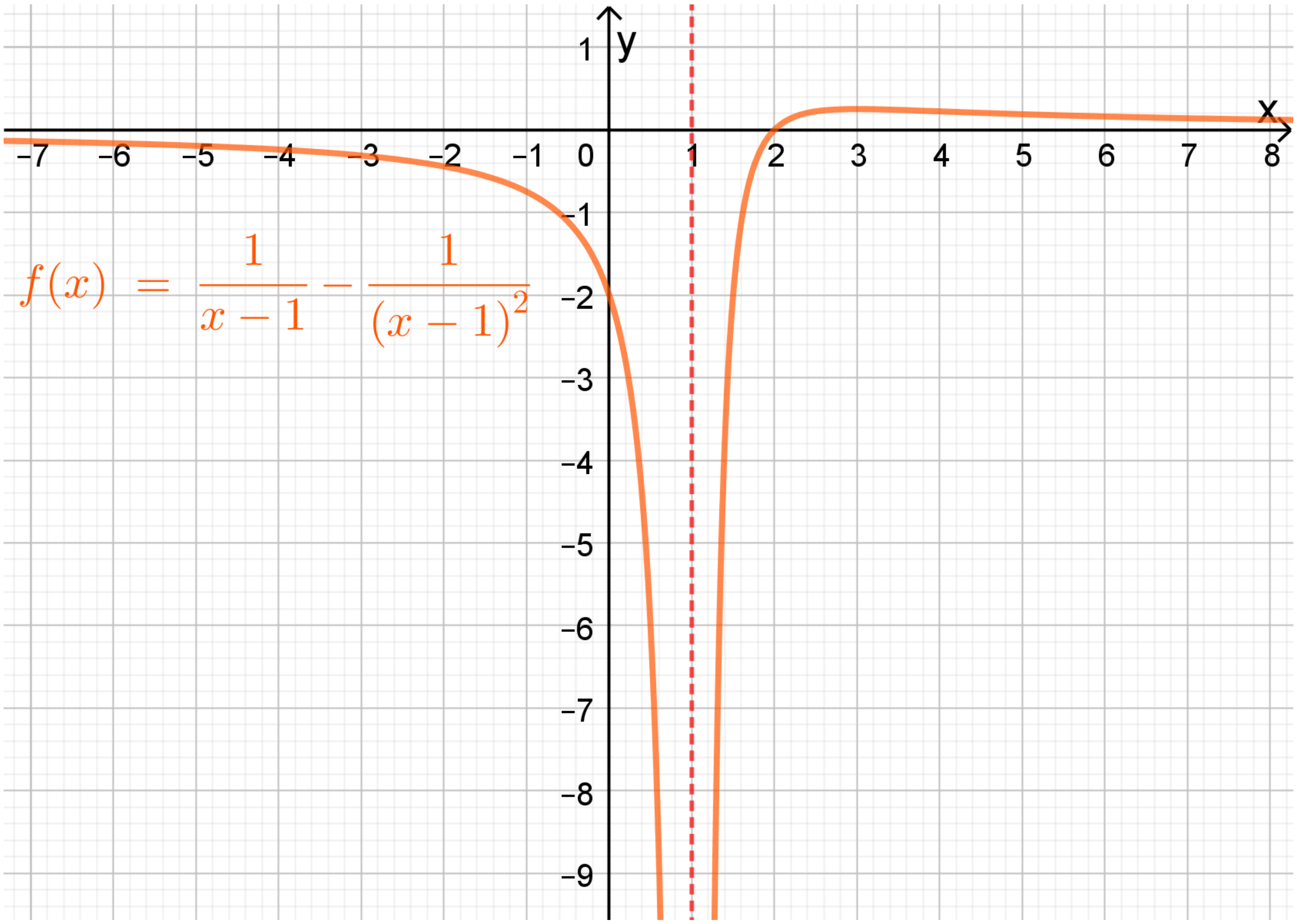
(Erotus on siis joko muotoa $-\infty-\infty=-\infty$ tai $\infty-\infty$.)

2. virhe: Erotuksesta $\infty-\infty$ ei voida suoraan päätellä mitään.

Korjaus:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{x-2}^{\to -1}}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0,\to 0}}=-\infty$$

Epäoleellinen raja-arvo on siis $-\infty$.



$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$
y
x
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
1
2
3
4
5
6
7
8