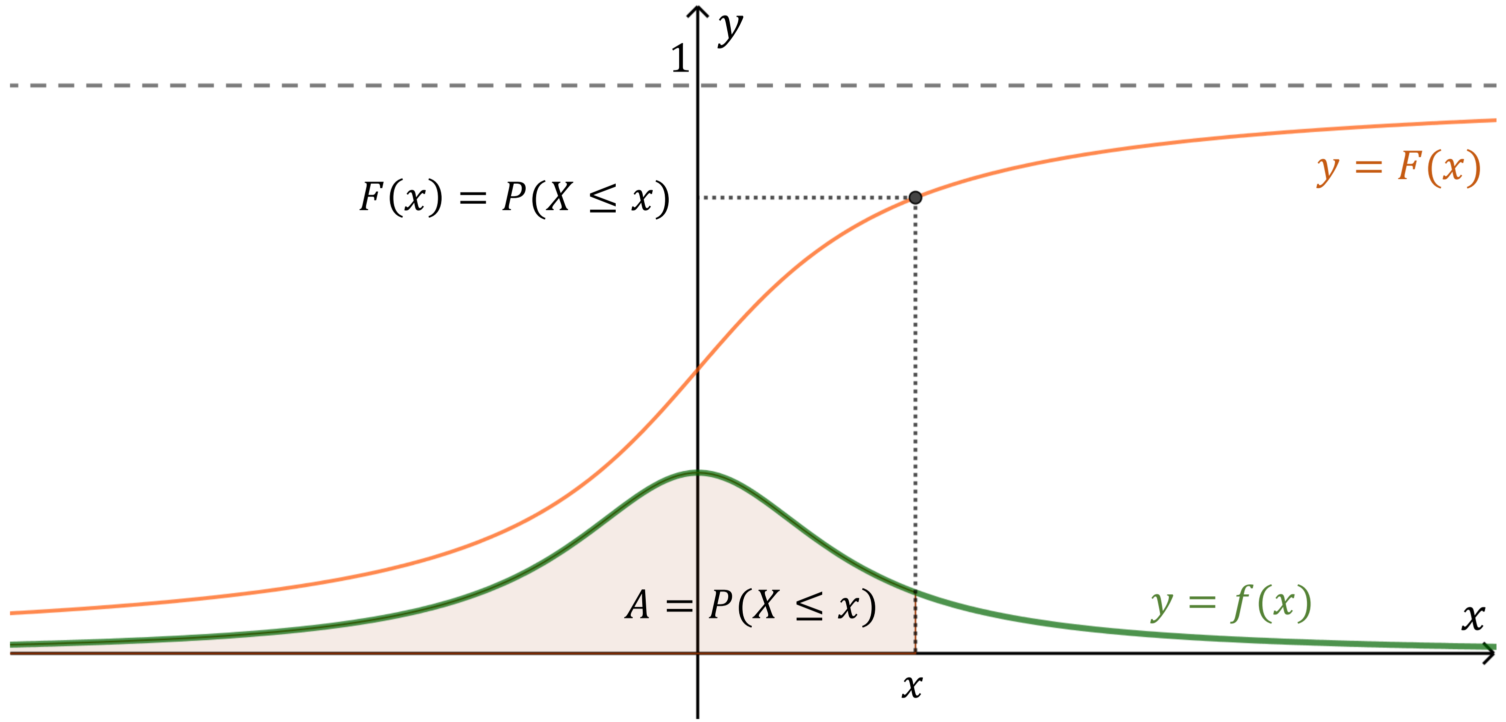
Kertymäfunktio

- *Kertymäfunktion* F arvo $F(x)$ on kyseiseen kohtaan x mennessä tiheysfunktion $f(x)$ ja x −akselin väliin kertynyt pinta-ala, joka voidaan tulkita jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan X todennäköisyytenä $P(X \leq x)$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = P(X \leq x)$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$



$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

Kertymäfunktio F on jatkuva ja kasvava.

t. 338, s. 126

a) $f(x) = |x|e^{-x^2}$ Koska itseisarvo ja eksponenttifunktio eivät voi olla negatiivisia, niin selvästi $f(x) \geq 0$ kaikilla x:n arvoilla.

Symmetrian perusteella: $\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$ (f on parillinen funktio: $f(x) = f(-x)$)

$$2\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx = -\lim_{t\to\infty}\int_{o}^{t} -2xe^{-x^2} = -\lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} e^{-x^2} = -\lim_{t\to\infty}(\overset{\to 0}{e^{-t^2}} - e^0) = 1$$

Välivaiheet malliksi. Tässä voisi käyttää myös laskinohjelmaa.

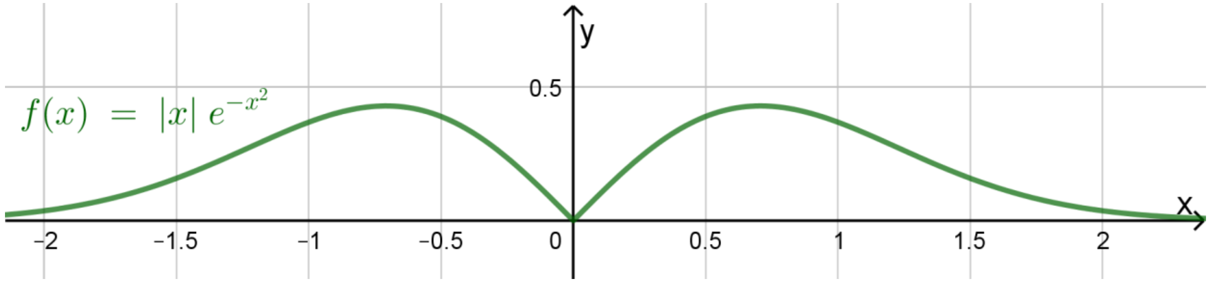
Funktio f on siis tiheysfunktio.

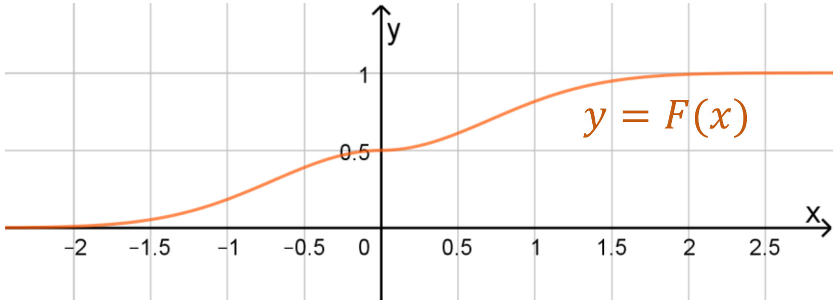
b) Kertymäfunktio on $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Kun $x < 0$, $\int_{-\infty}^{x} |t|e^{-t^2}dt = \int_{-\infty}^{x} -te^{-t^2}dt = \frac{1}{2}e^{-x^2}$ (laskimella)

Kun $x \geq 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} |t|e^{-t^2}dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} -te^{-t^2}dt}_{\text{symmetrian perusteella: } \frac{1}{2}} + \underbrace{\int_{0}^{x} te^{-t^2}dt}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2}$ (laskimella)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x^2}, & \text{kun } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x^2}, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$





c) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1)$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}e^{-2^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}e^{-1^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}e^{-1}$$

$$= \frac{e^3 - 1}{2e^4} \approx 0{,}17$$