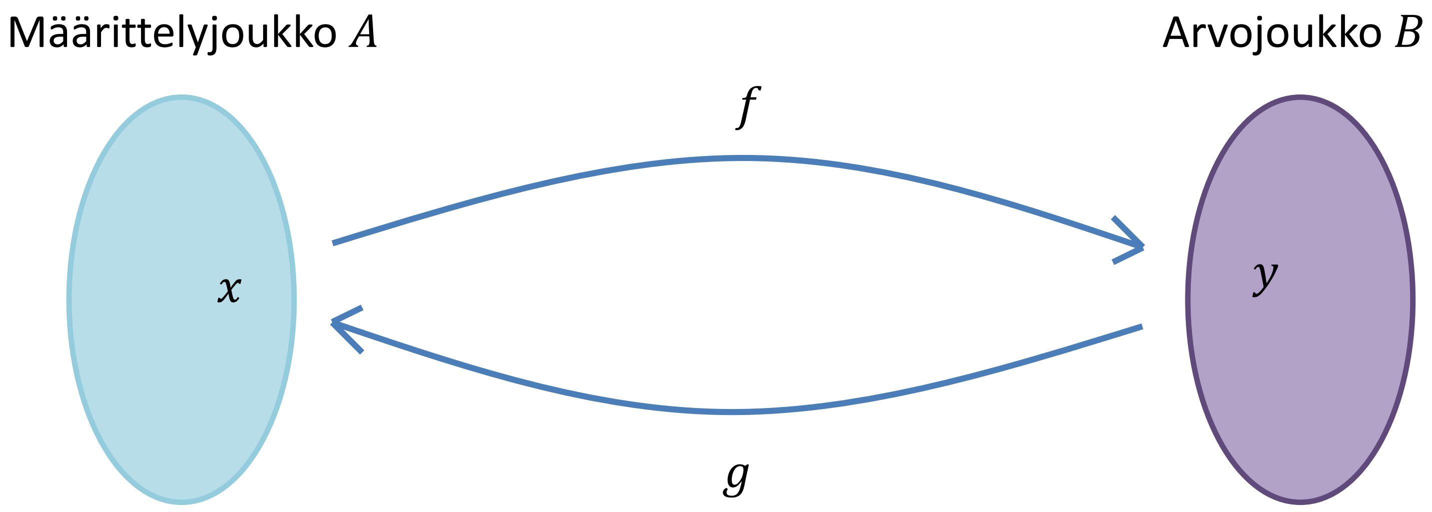
Käänteisfunktio

- Olkoon $f\colon A \longrightarrow B$ funktio, jonka jokaista arvoa $y \in B$ kohti on *yksikäsitteinen* määrittelyjoukon alkio $x \in A$, jolle pätee

$$f(x) = y.$$



- Määritellään funktio $g\colon B \longrightarrow A$ asettamalla $g(y) = x$, missä x on yhtälön $f(x) = y$ ratkaisu.
- Tällöin g on funktion f *käänteisfunktio*.

- Funktion $f: A \longrightarrow B$ käänteisfunktio merkitään $f^{-1}: B \longrightarrow A$

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

- Funktio f ja sen käänteisfunktio f^{-1} kumoavat toisensa:

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \text{ja} \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

- Kaikilla funktiolla ei ole käänteisfunktiota. Jos funktio saa saman arvon kahdessa eri kohdassa (käänteisfunktio ei ”tiedä” kumman arvon palauttaisi), niin käänteisfunktiota ei voi olla olemassa.
- Käänteisfunktion olemassaoloon riittää, että funktio saa jokaisen arvonsa vain kerran.
- Kasvava tai vähenevä funktio eli monotoninen funktio f saa jokaisen arvonsa vain yhdessä kohdassa.
- Monotonisella funktiolla f on siis käänteisfunktio f^{-1}, jonka määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko.

- **Esimerkki 1:** Onko funktiolla $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow]0,\infty[$, $f(x) = e^x$ käänteisfunktio?

  Funktiolla $f(x) = e^x$ on käänteisfunktio $f^{-1}\colon]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R},$ koska e^x on kasvava kaikilla reaaliluvuilla (sen derivaatta $e^x > 0$ kaikilla x:n arvoilla).

  Määritetään käänteisfunktion lauseke ratkaisemalla yhtälö

$$y = e^x \quad \Big|\ \ln$$

$$\ln y = \ln e^x$$

$$x = \ln y$$

  Kun vaihdetaan x:n ja y:n roolit (funktion kannalta ei ole väliä mitä muuttujakirjainta käytetään), käänteisfunktion lausekkeeksi saadaan

$$f^{-1}(x) = \ln x.$$

  (Määrittelyjoukko on f:n arvojoukko $]0,\infty[$ ja arvojoukko f:n määrittelyjoukko $\mathbb{R}$.)

- **Esimerkki 2:** Onko funktiolla $f(x) = -x^2 + 2, \quad x \geq 0$ käänteisfunktio?

Funktio $-x^2 + 2$ ei ole monotoninen määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}$, mutta kun määrittelyjoukkoa on rajoitettu ehdolla $x \geq 0$, niin f on vähenevä.

(derivaatta $-2x < 0$, kun $x > 0$ ja $-2x = 0$, kun $x = 0$)

$$y = -x^2 + 2$$

$$x^2 = 2 - y \,\big|\, \sqrt{\ } \qquad\qquad 2 - y \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq 2$$

$$x = \pm\sqrt{2 - y}$$

Negatiivinen ratkaisu ei käy ehdon $x \geq 0$ perusteella.

$$x = \sqrt{2 - y}$$

Käänteisfunktion f^{-1} lauseke on (kun vaihdetaan muuttujakirjaimet):

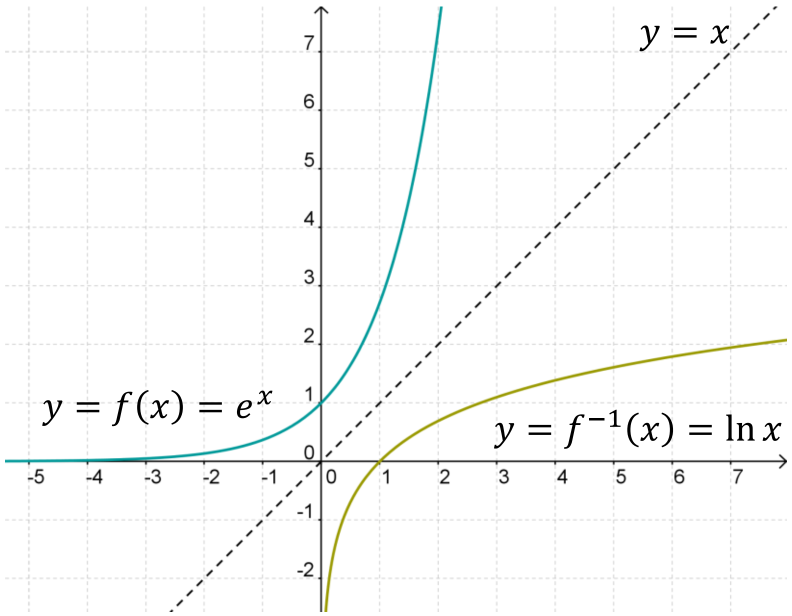
$$f^{-1}(x) = \sqrt{2 - x}$$

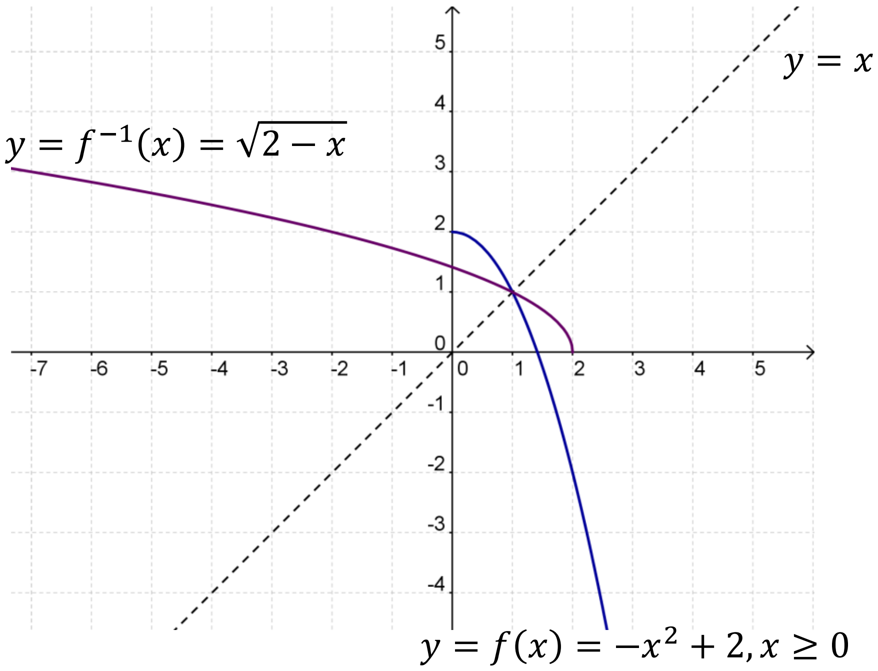
Käänteisfunktion määrittelyjoukko on $]-\infty, 2] = f$:n arvojoukko.

Arvojoukko on $[0, \infty[= f$:n määrittelyjoukko.

Käänteisfunktion kuvaaja

- Jos funktion f käänteisfunktion f^{-1} muuttujana on x, niin käänteisfunktion kuvaaja $y = f^{-1}(x)$ saadaan kuvaajasta $y = f(x)$ vaihtamalla kuvaajan pisteiden $x-$ ja $y-$koordinaatit keskenään.
- Käänteisfunktion kuvaaja on alkuperäisen funktion kuvaajan peilikuva suoran $y = x$ suhteen.



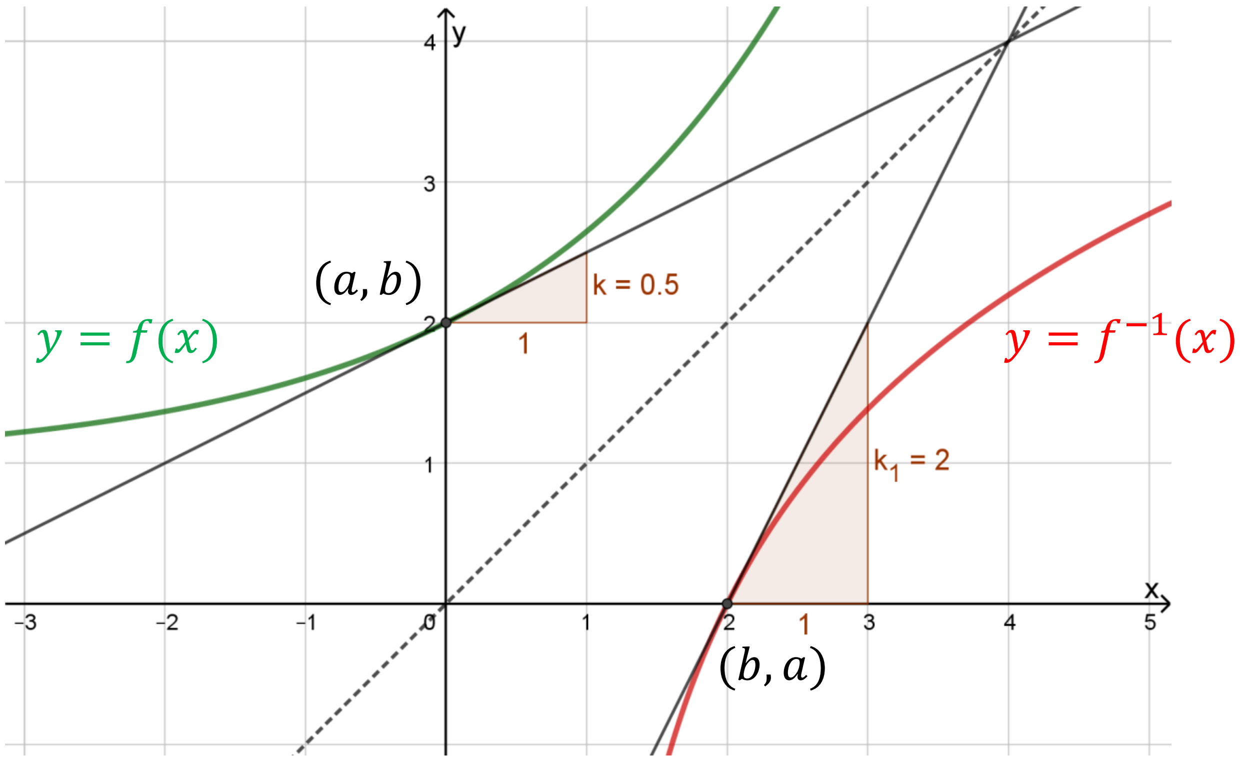


Käänteisfunktion derivaatta

- Käänteisfunktion derivaatan arvoja voidaan määrittää (peilikuva-ominaisuuden avulla) yksittäisissä kohdissa, vaikka käänteisfunktion lauseketta ei tunnettaisikaan.
- Jos derivoituvalla funktiolla f on käänteisfunktio f^{-1}, niin käänteisfunktion derivaatta kohdassa b on

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)},$$

kun a on se kohta, jossa $f(a) = b$ ja $f'(a) \neq 0$.



Käänteisfunktion piste (b, a) peilataan suoran $y = x$ suhteen pisteeksi (a, b). Näihin kohtiin piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet eli derivaatat ovat toistensa käänteislukuja.

t. 425, s. 141

a) Osoitetaan, että funktio $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ on monotoninen.

Derivaatta $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ kaikilla x:n arvoilla, koska parilliset potenssit eivät voi olla negatiivisia.

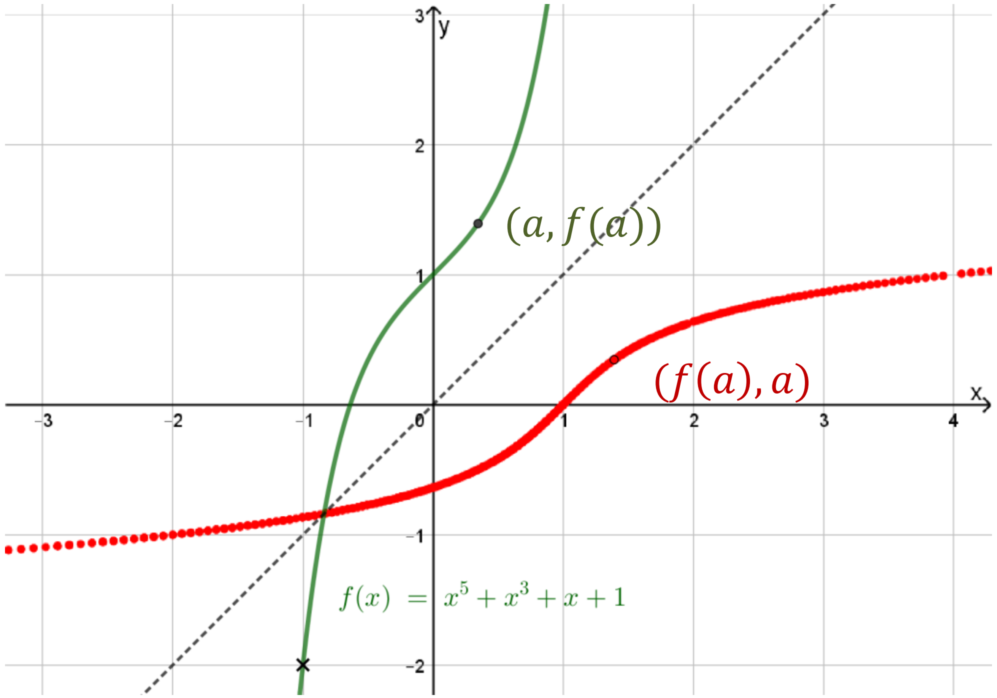
Funktio f on siis monotoninen (kasvava), joten sillä on käänteisfunktio. (Monotoninen funktio ei voi saada samaa arvoa eri kohdissa.)

b) Funktion f kuvaajasta nähdään, että kohdassa $x = -1$, funktio saa arvon -2.

(Sama huomataan funktion lausekkeesta:
$f(-1) = (-1)^5 + (-1)^3 - 1 + 1 = -2$)

Siis $f^{-1}(-2) = -1$.

Jos alkuperäinen funktio f tekee luvusta -1 luvun -2, niin käänteisfunktio f^{-1} tekee käänteisen operaation: luvusta -2 tulee -1.



Käänteisfunktion lauseke on liian monimutkainen määrittäväksi, mutta käänteisfunktion kuvaaja voidaan muodostaa peilaamalla GeoGebralla alkuperäisen funktion kuvaaja suoran $y = x$ suhteen tai tutkimalla pisteen $(f(a), a)$ jälkeä liukusäätimen avulla.

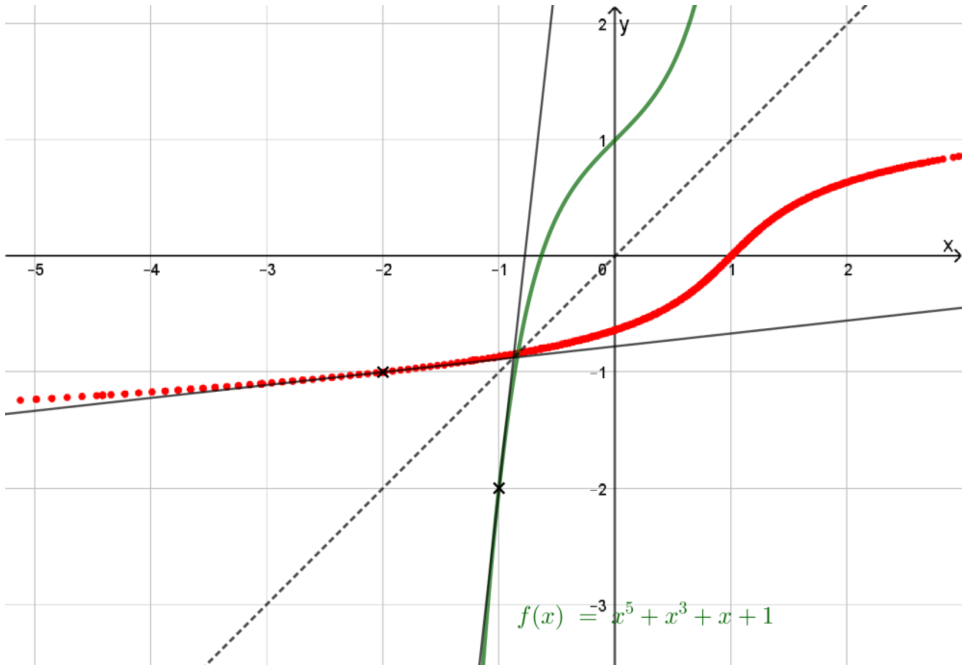
c) Käytetään kaavaa $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$, missä $b = -2$ ja a se kohta, jossa $f(a) = -2$.

Aiemman perusteella $a = -1$ ja $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$.

$$f'(-1) = 5 + 3 + 1 = 9$$

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{9}.$$

d) Funktion kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on funktion derivaatta tässä kohdassa.



Siis kysytty tangentin kulmakerroin on c-kohdassa laskettu derivaatan arvo $\frac{1}{9}$.

Tangenttisuoran yhtälö on

$$y - (-1) = \frac{1}{9}\big(x - (-2)\big)$$

$$y + 1 = \frac{1}{9}(x + 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{9}x - \frac{7}{9}$$