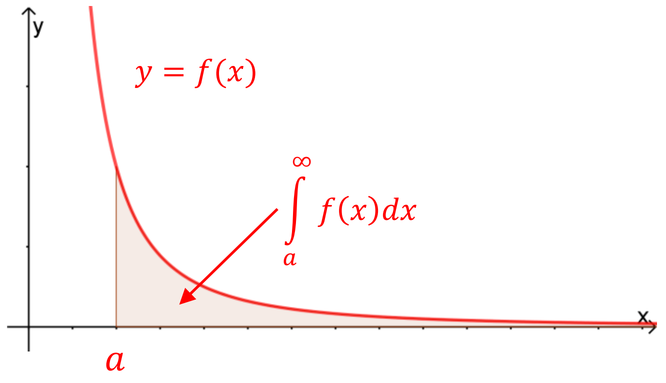
Epäoleellinen integraali

- Raja-arvojen avulla voidaan laskea määrättyjä integraaleja tilanteissa, joissa integroimisväli on ääretön tai funktion arvo lähestyy ääretöntä (tai miinus ääretöntä) integroimisvälin päätepisteessä.
- Välillä $[a, \infty[$ jatkuvan funktion f *epäoleellinen integraali* on

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$$

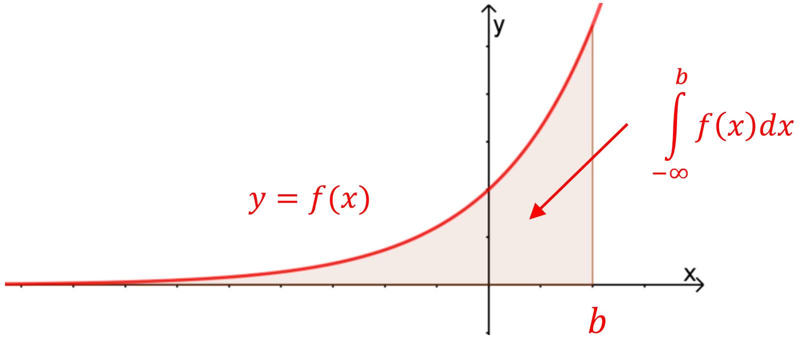


jos kyseinen raja-arvo on olemassa.

- Tällöin sanotaan, että epäoleellinen integraali suppenee.
- Jos (äärellistä) raja-arvoa ei ole, niin epäoleellinen integraali hajaantuu.

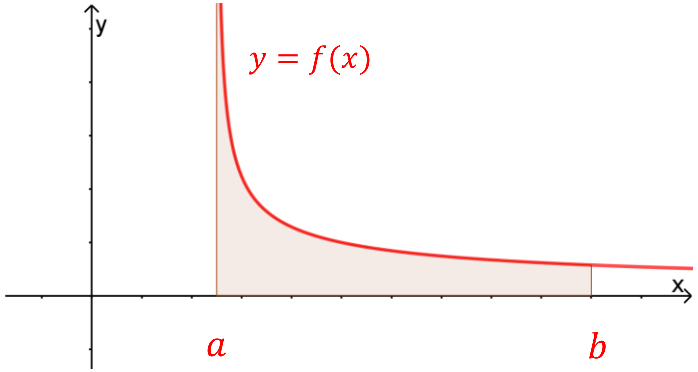
- Vastaavalla tavalla määritetään

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{b} f(x)dx.$$



- Määrätty integraali voidaan joissain tapauksissa laskea, vaikka funktion arvo kasvaisi tai vähenisi rajatta (toista) integroimisrajaa lähestyttäessä.
- Välillä $]a,b]$ jatkuvan funktion f (joka ei ole määritelty kohdassa $x = a$) epäoleellinen integraali on

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to a+} \int_{t}^{b} f(x)dx,$$



jos kyseinen raja-arvo on olemassa.

t. 261, s. 96

Muokataan sisäfunktion derivaatta
− 3 sulkeiden eteen. (Vakion saa
aina säädettyä sopivaksi)

a) $$\int_1^\infty e^{-3x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-3x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\int_1^t \underbrace{-3}_{f'(x)}\,\overbrace{e^{-3x}}^{g'(f(x))}dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\Big/_{1}^{t} e^{-3x}\right) = -\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}(\underbrace{e^{-3t}}_{\to 0} - e^{-3\cdot 1})$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(-e^{-3}) = \frac{1}{3}e^{-3} = \frac{1}{3e^3}$$

Yhdistetyn funktion integrointi:

$$\int f'(x)g'(f(x))dx = g(f(x)) + C$$

$g(x) = e^x \qquad g'(x) = e^x$

$f(x) = -3x \qquad f'(x) = -3$

Kaavan erikoistapaus, kun $g(x) = e^x$:

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$$

b) Lasketaan lyhemmin ilman $\lim$-merkintää (merkitään alarajaksi t):

$$\int_t^0 \frac{3}{e^{2x}}dx = \int_t^0 3e^{-2x}dx = -\frac{3}{2}\int_t^0 -2e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{3}{2}\Big/_{t}^{0} e^{-2x} = -\frac{3}{2}(\overbrace{e^{-2\cdot 0}}^{=1} - \underbrace{e^{-2t}}_{\to\infty}) \longrightarrow \infty, \quad \text{kun } t\to -\infty$$

<u>Epäoleellinen integraali hajaantuu.</u>

c) $\int_0^t 4xe^{-x^2}dx = -2\int_0^t -2xe^{-x^2}dx$

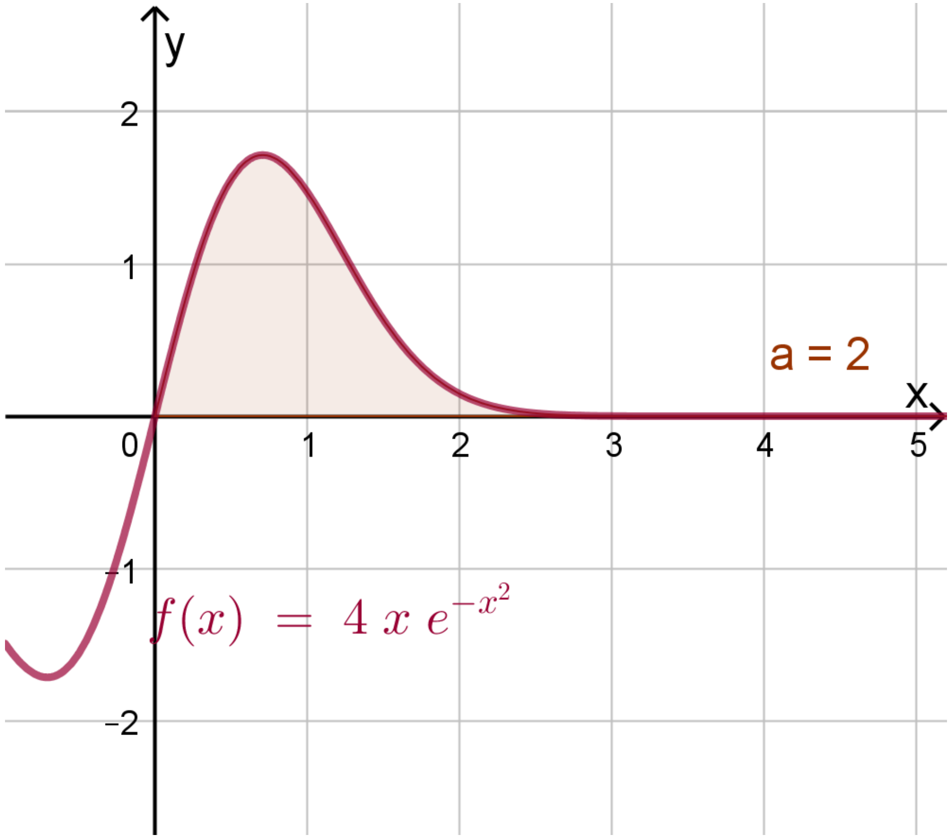
$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$

$= -2 \Big/_0^t e^{-x^2} = -2(e^{-t^2} - 1) \longrightarrow -2 \cdot (0-1) = 2,$ kun $t \to \infty$

$e^{-t^2} \to 0$

Muista tarkistaa integraalifunktio derivoimalla!

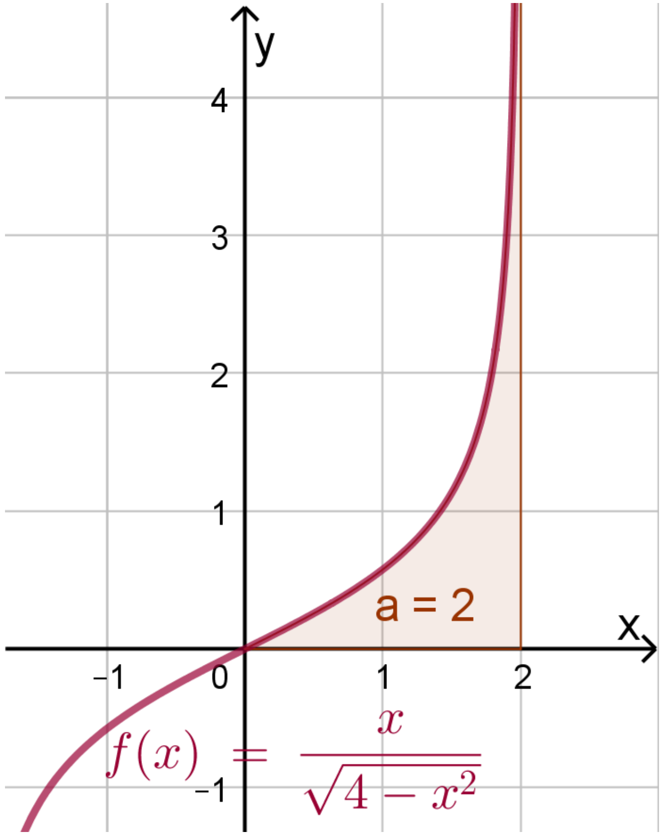
$D\left(-2e^{-x^2}\right) = -2 \cdot (-2x)e^{-x^2} = 4xe^{-x^2}$



t. 263 a, s. 96

Kyseessä on epäoleellinen integraali, sillä funktiota $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ ei ole määritelty ylärajalla $x = 2$.

Tutkitaan integraalia raja-arvojen avulla (merkitään ylärajaksi t):



Muokataan sisäfunktion $4 - x^2$ derivaatta $-2x$ sulkeiden eteen. (Onnistuu koska asteluku on sopiva.)

$$\int f'(x)\big(f(x)\big)^n dx = \frac{1}{n+1}\big(f(x)\big)^{n+1} + C$$

$$\int_0^t \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^t x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^t -2x(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\Big/_0^t \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}$$

Huomaa, että sisäfunktion lauseke säilyy muuttumattomana!

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\left[(4-t^2)^{\frac{1}{2}} - (4-0^2)^{\frac{1}{2}}\right] \longrightarrow -(4-2^2)^{\frac{1}{2}} + (4-0^2)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2,$$ kun $t \longrightarrow 2$ (vasemmalta).

Tehtävästä olisi saanut ”vahingossa” tavallisena integraalina (ilman raja-arvoja) saman tuloksen. Se olisi kuitenkin virheellinen merkintätapa, koska integraalifunktio ei myöskään ole määritelty kohdassa $x = 2$. (Integraalifunktio voi olla olemassa vain kohdissa, joissa alkuperäinen funktio on määritelty.)

Esimerkki: Määritä $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Raja-arvoa ei saa laskea molemmissa päissä samalla kertaa. Integroimisväli pitää jakaa kahteen osaan ja molempien integraalien täytyy supeta.

Lasketaan epäoleelliset integraalit raja-arvoina. Käsitellään ensin ”oikea puoli” eli tapaus $t \to \infty$.

$$\int_{0}^{t} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{t} 2x(x^2+1)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}\Big/_{0}^{t} \frac{1}{-2+1}(x^2+1)^{-2+1}$$

$$\int f'(x)\big(f(x)\big)^n dx = \frac{1}{n+1}\big(f(x)\big)^{n+1} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\Big/_{0}^{t} \frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{0^2+1}\right) \longrightarrow -\frac{1}{2}\cdot(0-1) = \frac{1}{2}, \text{ kun } t \to \infty$$

0, kun $t \to \infty$

Vastaavasti vasen puoli eli tapaus $t \to -\infty$:

$$\int_{t}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\Big/_{t}^{0} \frac{1}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{0^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right) \longrightarrow -\frac{1}{2}\cdot(1-0) = -\frac{1}{2}, \quad \text{kun } t \to -\infty$$

0, kun $t \to -\infty$

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{0}}$$

(Huomaa, että kyseessä on ns. pariton funktio)