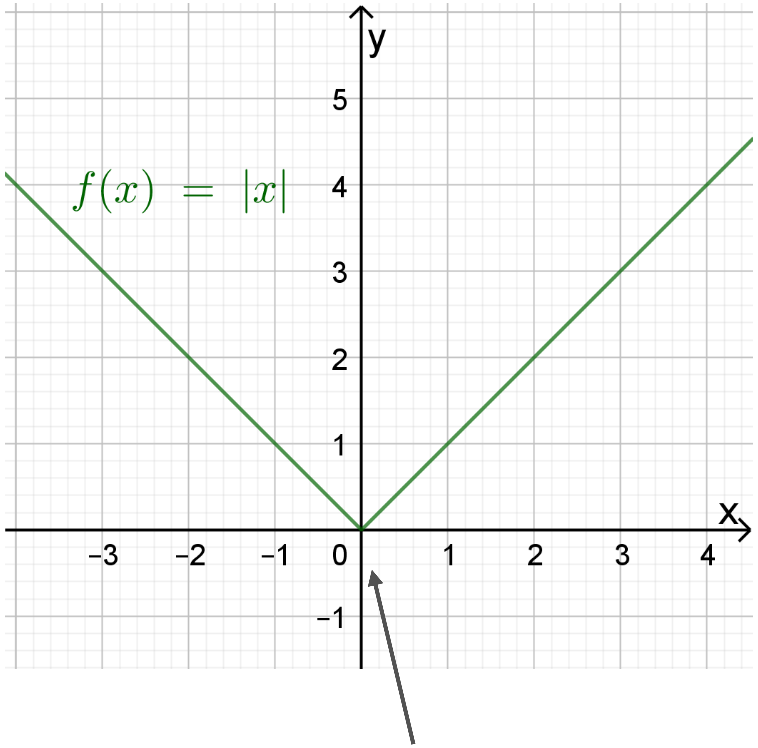
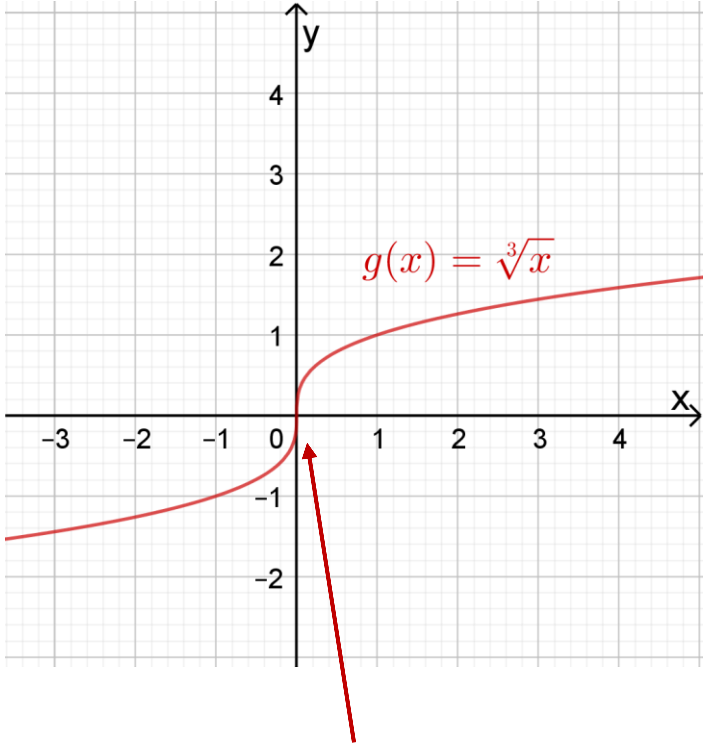
Derivoituvuus

- Funktio on derivoituva määrittelyjoukossaan A, jos funktion erotusosamäärällä on raja-arvo kaikilla $x \in A$.
- Polynomi-, rationaali-, eksponentti-, logaritmi- ja trigonometriset funktiot sekä niiden yhdistelmät ovat derivoituvia määrittelyjoukoissaan.
- Potenssifunktiot x^r ovat derivoituvia määrittelyjoukossaan, jos $r \geq 1$.
- Juurifunktiot $\sqrt[n]{x}$ (potenssifunktioita, joissa $r < 1$) sekä itseisarvofunktio $|x|$ ovat määrittelyjoukoissaan derivoituvia lukuun ottamatta kohtaa $x = 0$.
- Paloittain määritellyille funktioille riittää yleensä tarkastella derivoituvuutta (erotusosamäärän toispuolisten raja-arvojen avulla) kohdissa, joissa funktion lauseke vaihtuu
- Jatkuvuus on *välttämätön*, mutta *ei riittävä ehto* derivoituvuudelle (ks. oppikirja, s. 36)
- Graafisesti tarkasteltuna derivoituva funktio on ”sulava”. Kuvaajassa ei ole kulmia tai kärkiä, johon ei voi piirtää yksikäsitteistä tangenttia.

- Esimerkkejä (kaikkialla) jatkuvista funktioista, jotka eivät kuitenkaan ole kaikkialla (kohdassa $x = 0$) derivoituvia:





Kohtaan $x = 0$ ei voi piirtää yksikäsitteistä tangenttia.

Kohdassa $x = 0$ tangentti on pystysuora (kulmakerrointa ei ole)

t. 155. s. 43 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{kun } x \le 2 \\ x + a, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$

Paloittain määritelty funktio f koostuu polynomeista, jotka ovat jatkuvia ja derivoituvia, kun $x < 2$ tai $x > 2$. Riittää siis tarkastella jatkuvuutta ja derivoituvuutta vain kohdassa $x = 2$.

Funktio f on jatkuva tässä kohdassa, jos $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$.

Jotta raja-arvo olisi olemassa, toispuolisten raja-arvojen täytyy olla yhtä suuria.

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x^2 - 3x) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$$

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x + a) = 2 + a$$

Saadaan ehto $2 + a = -2 \quad \Leftrightarrow \quad a = -4$, jolloin $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{kun } x \le 2 \\ x - 4, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$

Tarkastellaan derivoituvuutta erotusosamäärän toispuolisten raja-arvojen avulla.

$$\lim_{x \to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} \frac{(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = 2 - 1 = 1$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Yhtälön $x^2 - 3x + 2 = 0$ ratkaisut ovat $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$.

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x-4-(-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2+}1=1$$

Erotusosamäärän raja-arvot lähestyvät molemmilta puolilta lukua 1, kun $x \longrightarrow 2$.

Funktio f on siis derivoituva kohdassa $x = 2$ ja $f'(2) = 1$.

Funktio f on näin ollen kaikkialla derivoituva.