t. 340, s. 83 (etsitään kaikki ratkaisut)

a) Kongruenssista $3x \equiv 22 \pmod 6$ voidaan muodostaa Diofantoksen yhtälö:

$$3x = 22 + 6y$$
$$3x - 6y = 22$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, sillä $\mathrm{syt}(3,6) = 3$ ja 22 ei ole jaollinen kolmella.

b) Vastaavalla tavalla kongruenssista $3x \equiv 21 \pmod 6$ saadaan Diofantoksen yhtälö $3x - 6y = 21$.

Yhtälöllä on ratkaisu (äärettömän monta ratkaisua), sillä 21 on jaollinen luvulla $\mathrm{syt}(3,6) = 3$.

Yhtälön eräs ratkaisu on $x_0 = 7$ ja $y_0 = 0$.

Määritetään yleinen ratkaisu. Riittää muodostaa pelkästään x:n lauseke.

$$x = 7 + \frac{n \cdot (-6)}{3}$$
$$x = 7 - 2n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ratkaisu voidaan kirjoittaa myös muotoon $x = 7 + 2n$, koska n käy läpi sekä positiiviset, että negatiiviset kokonaisluvut etumerkistä huolimatta.

Ratkaisun lausekkeesta saadaan itse asiassa kaikki parittomat luvut (esim. $1, 3, 5, 7$ ja 9).

Yhtälön $ax + by = c$ yleinen ratkaisu:

$$x = x_0 + \frac{nb}{\mathrm{syt}(a,b)}$$
$$y_0 = y_0 - \frac{na}{\mathrm{syt}(a,b)}$$

Tässä $a = 3$ ja $b = -6$.

c) Kongruenssi $8x \equiv 22 \pmod 6$ on Diofantoksen yhtälönä $8x - 6y = 22$.

Nyt $\mathrm{syt}(8,6) = 2$ ja 22 on jaollinen kahdella. Yhtälöllä on siis ratkaisu.

Ratkaisu voidaan hakea esittämällä ensin $syt(8,6) = 2$ lukujen 8 ja 6 avulla (Eukleideen algoritmi).

$$8 - 6 = 2 \quad \Big| \cdot 11$$

$$8 \cdot 11 - 6 \cdot 11 = 22$$

Yhtälön eräs ratkaisu on siis $x_0 = 11$ ja $y_0 = 11$ (tai esim. $x_0 = 2$ ja $y_0 = -1$).

Yleinen ratkaisu x:lle:

$$x = 11 + \frac{n \cdot (-6)}{2}$$

$$x = 11 - 3n, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

Ratkaisuilla on äärettömän monta esitysmuotoa. Esimerkiksi lauseke $x = 2 + 3n$ antaa samat ratkaisut (mutta eri n:n arvoilla).

(Etumerkin voi vaihtaa monikerralle ja luvusta 11 voidaan vähentää tai siihen voidaan lisätä mikä tahansa kolmen monikerta.)

Ratkaisuiksi voidaan valita $2, 5, 8, 11$ ja 14.

Tarkistus SpeedCrunchilla:

mod(22;6)
= 4

mod(8*2;6)
= 4

mod(8*5;6)
= 4

mod(8*8;6)
= 4

mod(8*11;6)
= 4

mod(8*14;6)
= 4