Yo-tehtävä S2023/8

Ison luvun jaollisuus 12 p.

1. Määritä suurin luku $k \in \mathbf{N}$, jolle $1023 \equiv -1 \pmod{2^k}$. **(3 p.)**

2. Todista, että luku $2^{12345678910} - 1$ on jaollinen luvulla 1023. **(9 p.)**

1. $1023 \equiv -1 \pmod{2^k} \quad \Leftrightarrow \quad 1023 + 1 \equiv 0 \pmod{2^k} \quad \Leftrightarrow \quad 1024 \equiv 0 \pmod{2^k}$

$\Leftrightarrow \quad 2^{10} \equiv 0 \pmod{2^k}$

Kongruenssiyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $2^{10} = 2^k \cdot q$, missä $q \in \mathbb{Z}$.

Nyt $q = \dfrac{2^{10}}{2^k} = 2^{10-k}$, joten suurin arvo, jolla $q \in \mathbb{Z}$ on $k = 10$.

Vastaus: Suurin kongruenssiyhtälön $1023 \equiv -1 \pmod{2^k}$ toteuttava luonnollinen luku on $k = 10$.

2. $1024 \equiv 1 \pmod{1023} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{10} \equiv 1 \pmod{1023}$

$\Leftrightarrow \quad 2^{10p} \equiv 1^p \pmod{1023}$

$\Leftrightarrow \quad 2^{10p} \equiv 1 \pmod{1023}$

Käytetään tulosta

$a \equiv b \pmod{n} \land p \in \mathbb{Z}_+$

$\Longrightarrow a^p \equiv b^p \pmod{n}$

Kun valitaan $p = 1234567891$, pätee kongruenssiyhtälö $2^{12345678910} \equiv 1 \pmod{1023}$.

Tämä tarkoittaa, että luku $2^{12345678910} - 1$ on jaollinen luvulla 1023 (m.o.t.)