

Eukleideen algoritmi

- *Eukleideen algoritmilla* voidaan määrittää kahden luvun suurin yhteinen tekijä.
- Algoritmia kannattaa käyttää, jos luvut ovat suuria, koska alkulukuhajotelmat voivat olla hankalia muodostaa.
- Algoritmi perustuu seuraavaan tulokseen:
- Olkoot a, b, q ja r sellaiset kokonaisluvut, että jakoyhtälö $a = bq + r$ ($r < b \leq a$) on voimassa.
- Tällöin $\text{syt}(a, b) = \text{syt}(b, r)$. (Todistus: Oppikirja s. 54)
- Tällä tavalla (suurten lukujen) suurin yhteinen tekijä voidaan määrittää pienempien lukujen avulla.

t. 275, s. 61

- a) Muodostetaan 1. jakoyhtälö, kun jaettava on 924 ja jakaja 819.

Muodostetaan seuraava jakoyhtälö, jossa jaettavana on edellinen jakaja 819 sekä uutena jakajana edellinen jakojäännös 105.

$$(105 \cdot 7 = 735, 819 - 735 = 84)$$

Toistetaan menettelyä niin kauan kunnes jako menee tasan.

Alkuperäisten lukujen suurin yhteinen tekijä on toiseksi viimeisen rivin jakojäännös.

- b) Muodostetaan jakojäännösten lausekkeet a-kohdan jakoyhtälöistä.

$$105 = 924 - 819 \cdot 1$$

$$84 = 819 - 105 \cdot 7$$

$$21 = 105 - 84 \cdot 1$$

Näiden avulla $\text{syt}(924, 819) = 21$ voidaan esittää muodossa $924x + 819y$ (ns. *lineaariyhdistely*).

$$924 = 819 \cdot 1 + 105$$

$$819 = 105 \cdot 7 + 84$$

$$105 = 84 \cdot 1 + 21$$

$$84 = 21 \cdot 4$$

$$\text{syt}(924, 819) = 21$$

$$21 = 105 - 84 \cdot 1$$

$$84 = 819 - 105 \cdot 7$$

$$21 = 105 - (819 - 105 \cdot 7) \cdot 1$$

$$21 = 105 - 819 + 105 \cdot 7$$

$$21 = -819 + 105 \cdot 8$$

$$105 = 924 - 819 \cdot 1$$

$$21 = -819 + (924 - 819 \cdot 1) \cdot 8$$

$$21 = -819 + 924 \cdot 8 - 819 \cdot 8$$

$$21 = 924 \cdot 8 + 819 \cdot (-9)$$

Siis kokonaisluvut $x = 8$ ja $y = -9$ toteuttavat yhtälön $924x + 819y = 21$.

Kyseessä on yksittäisratkaisu. Kokonaislukuratkaisuja on itse asiassa äärettömän monta.