Diofantoksen yhtälöt

- *Diofantoksen yhtälöt* ovat vähintään kahden muuttujan polynomiyhtälöitä joiden kertoimet ovat kokonaislukuja.
- Diofantoksen yhtälöille etsitään vain kokonaislukuratkaisuja.
- Esim. Pythagoraan lause kirjoitettuna muotoon $x^2 + y^2 = z^2$ on Diofantoksen yhtälö, jonka kokonaislukuratkaisut ovat Pythagoraan kolmikkoja: $(3, 4, 5)$; $(5, 12, 13)$; $(8, 15, 17)$ ...
- *Fermat'n suuren lauseen* mukaan yhtälöllä $x^n + y^n = z^n$ ei ole kokonaislukuratkaisuja, kun $n > 2$.
  - Pierre de Fermat esitti lauseen 1600 luvulla, mutta vasta n. 350 vuotta myöhemmin Andrew Wiles todisti sen.
- Tällä opintojaksolla tarkastellaan lineaarisia kahden muuttujan Diofantoksen yhtälöitä, jotka ovat muotoa $ax + by = c$.

Diofantoksen yhtälön $ax + by = c$ ratkaiseminen

- Seuraavassa kaikki kertoimet ovat kokonaislukuja ja ratkaisuilla tarkoitetaan kokonaislukuratkaisuja.
- Hyödynnetään oppikirjan s. 58 lausetta:

1. Yhtälöllä $ax + by = c$ on ratkaisuja jos ja vain jos luku c on jaollinen luvulla $\mathrm{syt}(a, b)$.
2. Jos $x = x_0$ ja $y = y_0$ on jokin yhtälön $ax + by = c$ ratkaisu, niin kaikki ratkaisut ovat

$$x = x_0 + \frac{nb}{syt(a,b)} \quad \text{ja} \quad y = y_0 - \frac{na}{syt(a,b)}, \quad \text{missä } n \in \mathbb{Z}.$$

- Yksittäisratkaisun voi etsiä Eukleideen algoritmin avulla.

t. 278, s. 62

a) Määritetään $\mathrm{syt}(154, 126)$ Eukleideen algoritmilla.

$$154 = 126 \cdot 1 + 28$$
$$126 = 28 \cdot 4 + 14 \qquad (28 \cdot 4 = 112, \qquad 126 - 112 = 14)$$
$$28 = 2 \cdot 14$$

Siis $\mathrm{syt}(154, 126) = 14$.

b) Diofantoksen yhtälöllä $154x + 126y = 56$ on ratkaisuja, koska 56 on jaollinen lukujen 154 ja 126 suurimmalla yhteisellä tekijällä 14. $(56 = 4 \cdot 14)$

Ratkaistaan jakojäännösten lausekkeet a-kohdasta.

$$28 = 154 - 126 \cdot 1$$
$$14 = 126 - 28 \cdot 4$$

Etsitään seuraavaksi yhtälön $154x + 126y = 14$ jokin ratkaisu jakojäännöksien lausekkeita hyödyntäen. ($\mathrm{syt}(a, b)$ voidaan aina esittää a:n ja b:n lineaariyhdistelynä)

Kertomalla tämä ratkaisu neljällä saadaan yhtälön $154x + 126y = 56$ yksittäisratkaisu.

$$14 = 126 - 28 \cdot 4 \qquad 28 = 154 - 126 \cdot 1$$

$$14 = 126 - (154 - 126 \cdot 1) \cdot 4$$

$$14 = 126 - 154 \cdot 4 + 126 \cdot 4$$

$$14 = 154 \cdot (-4) + 126 \cdot 5$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain neljällä saadaan:

$$56 = 154 \cdot (-16) + 126 \cdot 20$$

Siis Diofantoksen yhtälön $154x + 126y = 56$ eräs ratkaisu on $x_0 = -16$ ja $y = 20$.

Kaikki ratkaisut:

$$x = x_0 + \frac{nb}{syt(a,b)} \qquad y = y_0 - \frac{na}{syt(a,b)}$$

$a = 154$
$b = 126$
$\text{syt}(a,b) = 14$

$$x = -16 + \frac{126n}{14} \qquad y = 20 - \frac{154a}{14}$$

$$x = -16 + 9n \qquad y = 20 - 11n,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.