t. 441, s. 130
(Yo-tehtävä K2016/8)

a) Määritetään tason yhtälö kolmen tason pisteen avulla.

Valitaan suoralta $x + 2y = 3$ kaksi pistettä.

Sijoitetaan ensin $x = 0$:

$$0 + 2y = 3$$
$$y = \frac{3}{2}$$

Siis yksi suoran piste (ja samalla tason ja y −akselin leikkauspiste) on $(0, \frac{3}{2}, 0)$

Sijoitetaan seuraavaksi $y = 0$:

$$x + 2 \cdot 0 = 3$$
$$x = 3$$

Toinen suoran piste (ja samalla tason ja x −akselin leikkauspiste) on $(3,0,0)$.

Saatiin kolme tason pistettä A, B ja C, jotka eivät kaikki ole samalla suoralla.

Merkitään $A = (2, 4, 6), B = (3, 0, 0)$ ja $C = \left(0, \frac{3}{2}, 0\right)$.

Tason erisuuntaisia vektoreita ovat $\overline{BA} = \begin{bmatrix} 2-3 \\ 4-0 \\ 6-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ja $\overline{BC} = \begin{bmatrix} 0-3 \\ \frac{3}{2}-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Valitaan tason suuntavektoreiksi $\bar{u} = \overline{BA} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ja $\bar{v} = 2\overline{BC} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Suuntavektoria voidaan kertoa sopivalla nollasta eroavalla luvulla.

Tason eräs normaalivektori on $\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 4 & 6 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} \\ -1 & 4 \\ -6 & 3 \end{matrix}$

Nollia sisältävät vinorivit voidaan jättää pois.

$$= -36\bar{\jmath} - 3\bar{k} + 24\bar{k} - 18\bar{\imath}$$

$$= -18\bar{\imath} - 36\bar{\jmath} + 21\bar{k} = \begin{bmatrix} -18 \\ -36 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Käytetään koordinaattiyhtälössä $a(x - x_o) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ tunnettuna tason pisteenä pistettä $B = (3, 0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Tason yhtälöksi saadaan

$$-18(x-3)-36(y-0)+21(z-0)=0 \quad \Big|:(-3)$$

$$6(x-3)+12(y-0)-7(z-0)=0$$

$$6x+12y-7z-18=0$$

b) $x-$ ja $y-$akselien leikkauspisteet määritettiin jo alussa. Ratkaistaan vielä tason ja $z-$akselin leikkauspiste sijoittamalla $x=0$ ja $y=0$ tason yhtälöön:

$$6\cdot 0+12\cdot 0-7z-18=0$$

$$-7z=18 \qquad \Leftrightarrow \quad z=-\frac{18}{7} \quad (\approx -2{,}57)$$

Tason ja $x-$akselin leikkauspiste on $(3{,}0{,}0)$.

Tason ja $y-$akselin leikkauspiste on $\left(0,\frac{3}{2},0\right)$.

Tason ja $z-$akselin leikkauspiste on $\left(0{,}0,-\frac{18}{7}\right)$.

Toinen tapa: (laskinohjelmalla ilman ristituloa)

Tason yhtälö voidaan ratkaista sijoittamalla normaalimuotoiseen yhtälöön $ax+by+cz+d=0$ kolmen tason pisteen koordinaatit. Käytetään pisteitä $A=(2,4,6), B=(3,0,0)$ ja $C=\left(0,\frac{3}{2},0\right)$. Tason yhtälöön jää tällöin yksi parametri, mutta sille voi valita sopivan arvon. (Tason yhtälöllä on äärettömän monta esitysmuotoa, koska yhtälöä voi kertoa millä tahansa nollasta eroavalla reaaliluvulla.)

TI-Nspire:

$f(x,y,z):=a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d$ *Valmis*

$$\text{solve}\left(\begin{cases} f(2,4,6)=0 \\ f(3,0,0)=0 \\ f\left(0,\frac{3}{2},0\right)=0 \end{cases},\{a,b,c\}\right) \qquad a=\frac{-d}{3} \text{ and } b=\frac{-2\cdot d}{3} \text{ and } c=\frac{7\cdot d}{18}$$

Helpoimmalla pääsee, jos tallettaa normaalimuotoisen tason yhtälön oikean puolen kolmen muuttujan funktioksi.

Kun valitaan $d=-18$, saadaan kokonaislukukertoimet $a=6, b=12$ ja $c=-7$, kuten edellä.

Yhtälöryhmän yhtälöt saa myös sijoitusmerkinnällä:

$a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0|x=2 \text{ and } y=4 \text{ and } z=6 \qquad 2\cdot a+4\cdot b+6\cdot c+d=0$

jne.