t. 155, s. 34

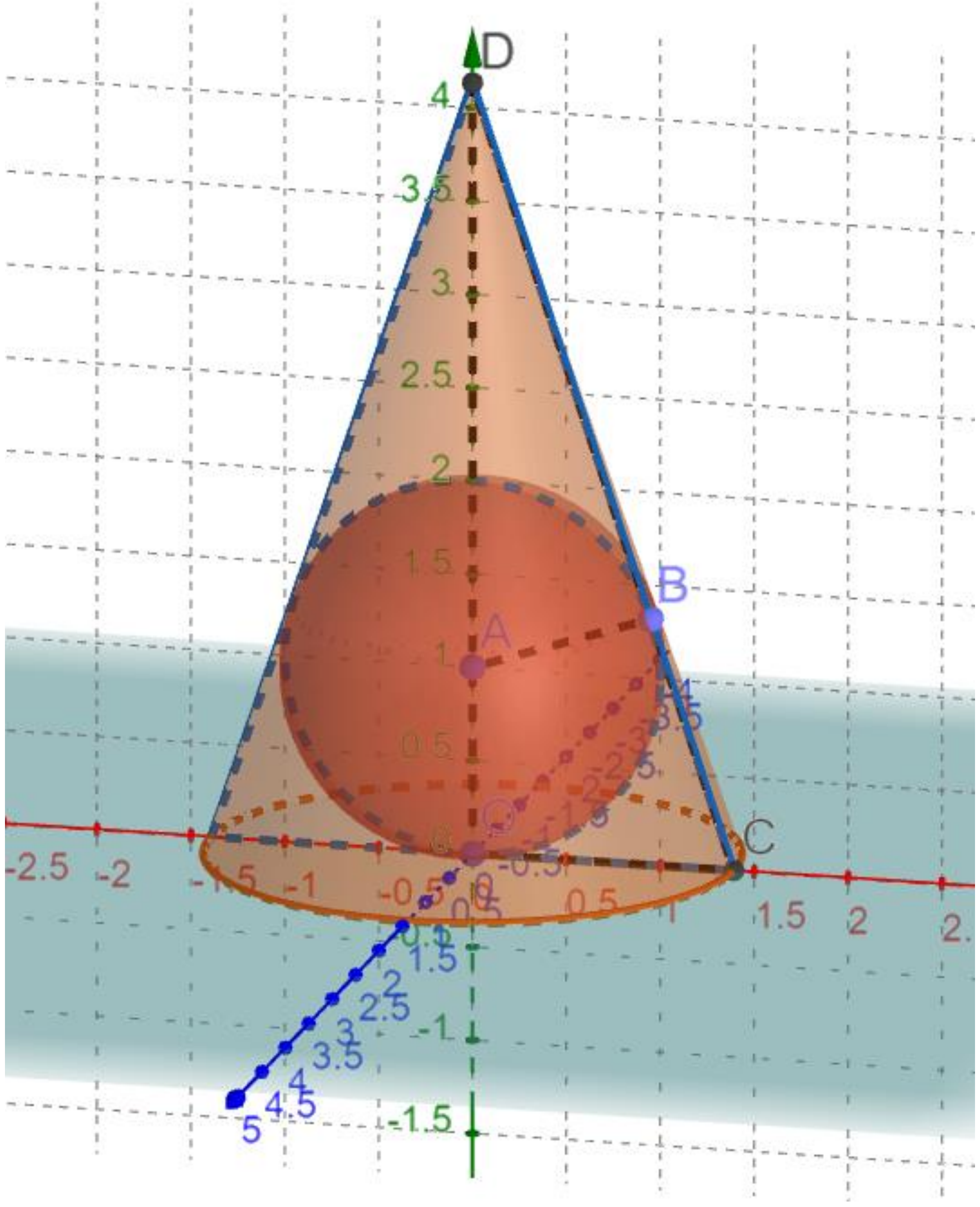
Piirretään ensin kolmiulotteinen mallikuvio.

Kuvassa y −akseli käännetty pystysuuntaiseksi, jotta kartion ja pallon poikkileikkaus saadaan (kaksiulotteiseen) piirtotilaan.

Mallikuvassa pallon keskipiste on $A = (0, 1, 0)$ ja säde $r = 1$.

Pallon ja xy −tason leikkauskäyrälle (ympyrälle) on piirretty tangentti jostain y-akselin pisteestä D. Kartion pohjan säde saadaan tangentin ja x −akselin leikkauspisteestä C.

Tehtävä voidaan tarkistaa (ja ratkaista kokeellisesti) säätämällä pisteen D paikkaa ja vertaamalla kartion ja pallon tilavuuksia.



Tutkitaan poikkileikkausta (2D-) piirtotilassa.

Kolmiot OCD ja BAD ovat yhdenmuotoisia (kk, suora kulma ja yhteinen kulma D), joten niiden vastinsivut ovat verrannollisia:

$$\frac{r}{a} = \frac{b}{h}$$

Kartion pohjan säde on $a = \frac{hr}{b}$ ja kartion tilavuus

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{h^2 r^2}{b^2} h = \frac{1}{3}\pi \frac{h^3 r^2}{b^2}$$

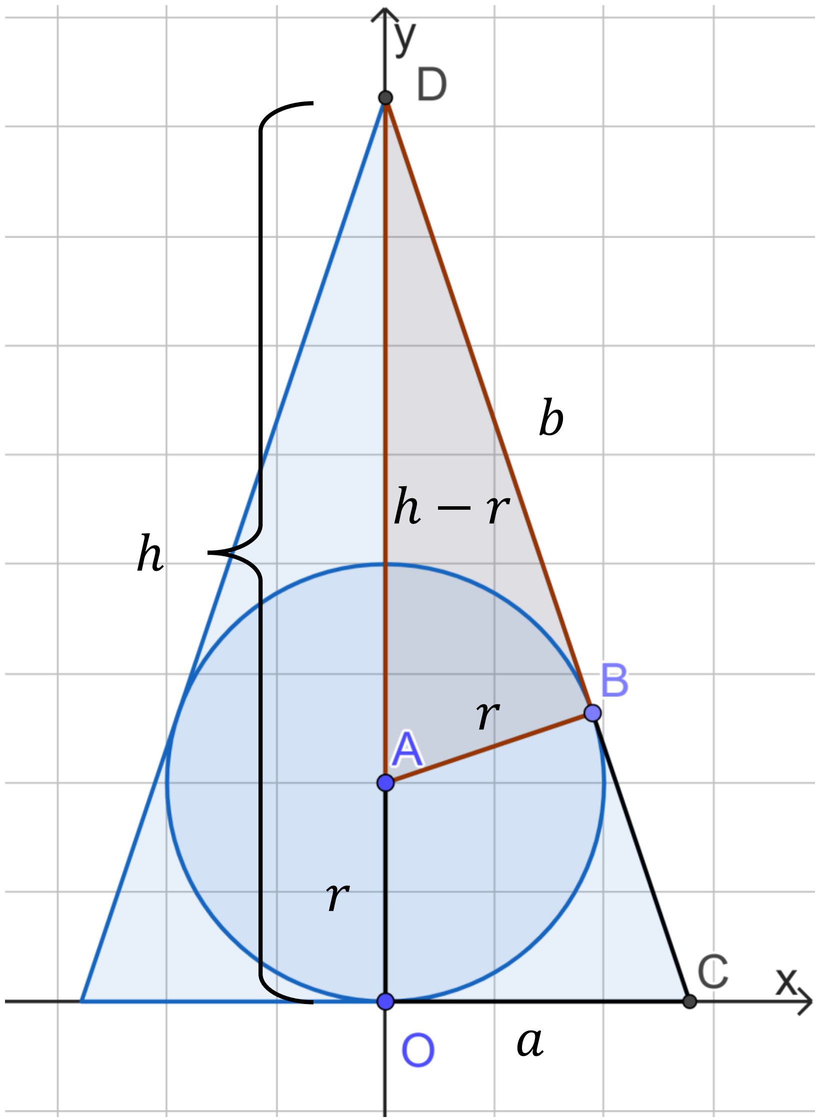
Pythagoraan lauseella saadaan

$$(h-r)^2 = r^2 + b^2$$

$$b^2 = (h-r)^2 - r^2$$

$$b^2 = h^2 - 2hr + r^2 - r^2$$

$$b^2 = h^2 - 2hr$$



Kartion tilavuus kartion korkeuden $h > r$ funktiona (pallon säde r on vakio) on siis

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi \frac{h^3 r^2}{h^2 - 2hr} = \frac{\pi h^3 r^2}{3h^2 - 6hr}.$$

Tutkitaan funktion V kulkua derivaatan avulla:

$v(h) := \dfrac{\pi \cdot h^3 \cdot r^2}{3 \cdot h^2 - 6 \cdot h \cdot r}$	*Valmis*
$dv(h) := \dfrac{d}{dh}(v(h))$	*Valmis*
⚠ $dv(h)$	$\dfrac{-h \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (4 \cdot r - h)}{3 \cdot (2 \cdot r - h)^2}$
⚠ $\text{solve}(dv(h)=0,h) \mid h>r>0$	$h=4 \cdot r$ and $r>0$

Derivaatan V' ainoa nollakohta määrittelyalueessa on $h = 4r$.

Tutkitaan derivaatan merkkiä nollakohdan molemmin puolin. (Voitaisiin myös laatia kulkukaavio.)

$$V'(3r) = -\pi r^2 < 0$$ ja

$dv(3\cdot r)$ $\quad$ $-\pi\cdot r^2$

$$V'(5r) = \frac{5\pi r^2}{27} > 0$$

$dv(5\cdot r)$ $\quad$ $\frac{5\cdot\pi\cdot r^2}{27}$

Derivaatan merkki vaihtuu siis negatiivisesta positiiviseksi nollakohdassa $h = 4r$, joten tässä kohdassa on paikallinen minimi. Koska derivaatalla ei ole muita nollakohtia, funktion V pienin arvo saavutetaan tässä kohdassa.

$$V(4r) = \frac{8}{3}\pi r^3$$

$v(4\cdot r)$ $\quad$ $\frac{8\cdot\pi\cdot r^3}{3}$

Kysytty kartion ja pallon tilavuuksien suhde on $$\frac{\frac{8}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 2 = 2 : 1.$$