Pisteen etäisyys tasosta

- Pisteen $P = (x_0, y_0, z_0)$ etäisyys tasosta $ax + by + cz + d = 0$ saadaan kaavalla

$$\frac{|ax_0 + bx_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Pistettä P lähinnä oleva tason piste on tason ja pisteen P kautta kulkevan tason normaalin leikkauspiste. Lähinnä oleva piste on pisteen P projektio tasolle.
- Todistetaan kaava laskinohjelmaa hyödyntäen (vrt. oppikirjan todistus s. 142)

$x{:=}x0+a\cdot t$	$a\cdot t+x0$
$y{:=}y0+b\cdot t$	$b\cdot t+y0$
$z{:=}z0+c\cdot t$	$c\cdot t+z0$

Muodostetaan parametrimuotoinen esitys normaalisuoralle. (Tallennetaan suoran yleisen pisteen koordinaatit (x, y, z) parametrin t lausekkeina.) Normaalisuoran suuntavektorina on tason normaali $\bar{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

$\text{solve}(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z+d=0,t)$ $\quad t=\dfrac{-(a\cdot x0+b\cdot y0+c\cdot z0+d)}{a^2+b^2+c^2}$

Ratkaistaan millä parametrin arvolla suoran piste (x,y,z) on myös tason piste.

$t:=\dfrac{-(a\cdot x0+b\cdot y0+c\cdot z0+d)}{a^2+b^2+c^2}$ $\quad \dfrac{-(a\cdot x0+b\cdot y0+c\cdot z0+d)}{a^2+b^2+c^2}$

Talletetaan parametrin arvo. Nyt piste (x,y,z) on pistettä $P=(x_0,y_0,z_0)$ lähinnä oleva tason piste.

$$v:=\begin{bmatrix} x-x0 \\ y-y0 \\ z-z0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{-(a\cdot(b\cdot y0+c\cdot z0+d)-(b^2+c^2)\cdot x0)}{a^2+b^2+c^2}-x0 \\ \dfrac{-(a\cdot x0+b\cdot y0+c\cdot z0+d)\cdot b}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{-(a\cdot x0+b\cdot y0+c\cdot z0+d)\cdot c}{a^2+b^2+c^2} \end{bmatrix}$$

Muodostetaan pisteiden (x,y,z) ja (x_0,y_0,z_0) välinen vektori. Tämän vektorin pituus on pisteen P ja tason välinen etäisyys.

$$\text{norm}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{-(a\cdot(b\cdot y0+c\cdot z0+d)-(b^2+c^2)\cdot x0)}{a^2+b^2+c^2}-x0 \\ \dfrac{-(a\cdot x0+b\cdot y0+c\cdot z0+d)\cdot b}{a^2+b^2+c^2} \\ \dfrac{-(a\cdot x0+b\cdot y0+c\cdot z0+d)\cdot c}{a^2+b^2+c^2} \end{bmatrix}\right) \qquad \frac{|a\cdot x0+b\cdot y0+c\cdot z0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Lasketaan etäisyysvektorin pituus. Tuloksena saadaan kaava pisteen etäisyydelle tasosta.

t. 482, s. 145

Tasot ovat yhdensuuntaisia, sillä niillä on sama normaalivektori $\bar{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valitaan jokin piste toiselta tasolta. (Kaikki tason pisteet ovat yhtä kaukana toisesta yhdensuuntaisesta tasosta.)

Sijoitetaan esimerkiksi $x = 0$ ja $y = 0$ yhtälöön $2x + 2y + z + 1 = 0$.

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = -1$$

Siis eräs tason $2x + 2y + z + 1 = 0$ piste (z –akselin leikkauspiste) on $A = (0, 0, -1)$.

Lasketaan pisteen A etäisyys tasosta $2x + 2y + z + 4 = 0$ kaavalla

$$\frac{|ax_0 + bx_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -1)$

$a = 2, b = 2, c = 1, d = 4$

$$\frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{9}} = 1$$

Vastaus: Tasojen välinen etäisyys on 1.

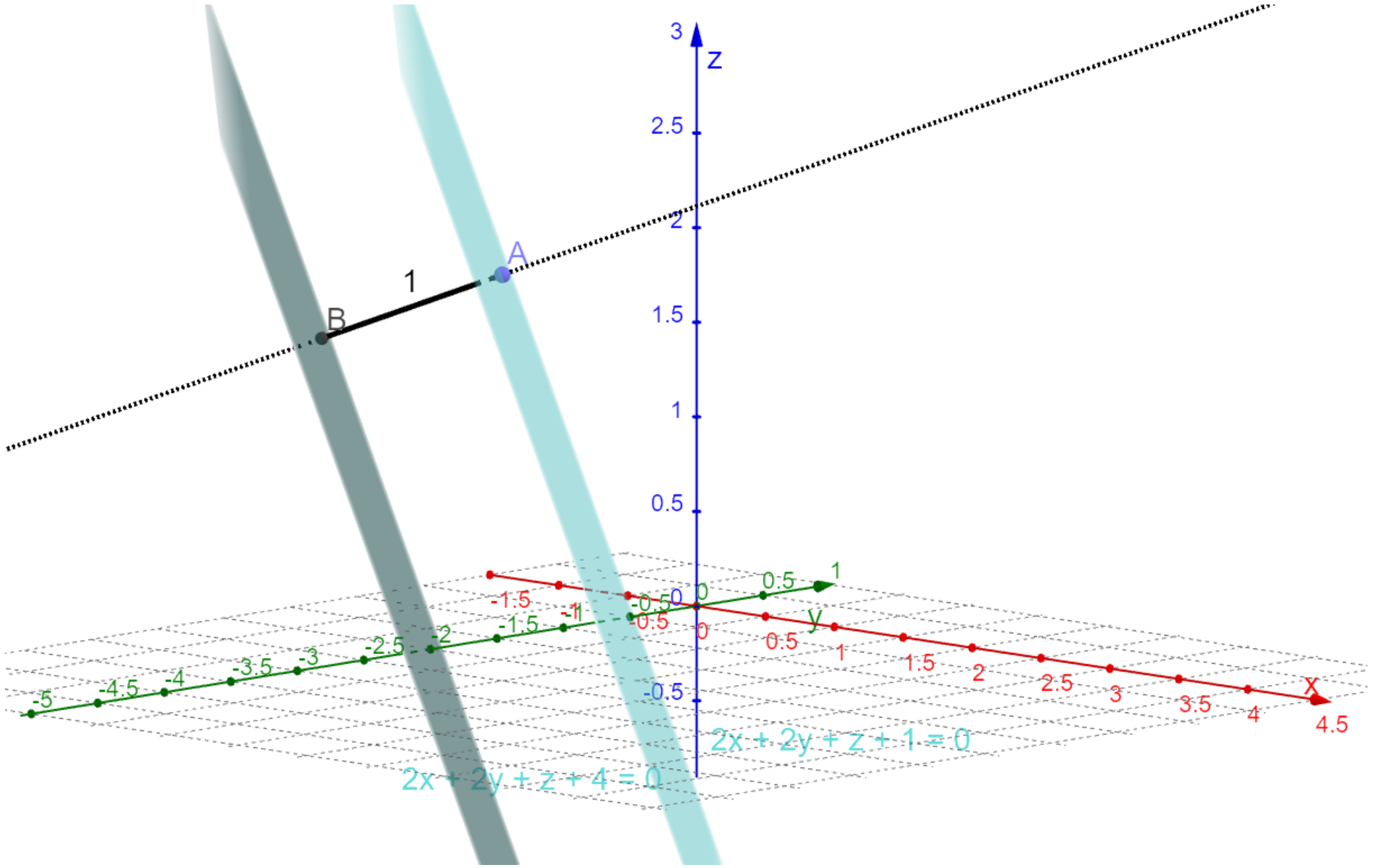
Piirretään tasot 3D-grafiikka-tilassa (kirjoittamalla tasojen yhtälöt syöttökenttään).

Otetaan jokin piste (A) kummalta tahansa tasolta ja piirretään tähän kohtaan tasolle normaali.

Määritetään normaalin leikkauspiste (B) toisen tason kanssa.

Määritetään janan AB pituus.

GeoGebran perusteella janan AB pituus eli tasojen välimatka on (valitusta pisteestä A riippumatta) yksi: $|\overline{AB}| = 1$.



t. 480, s. 145

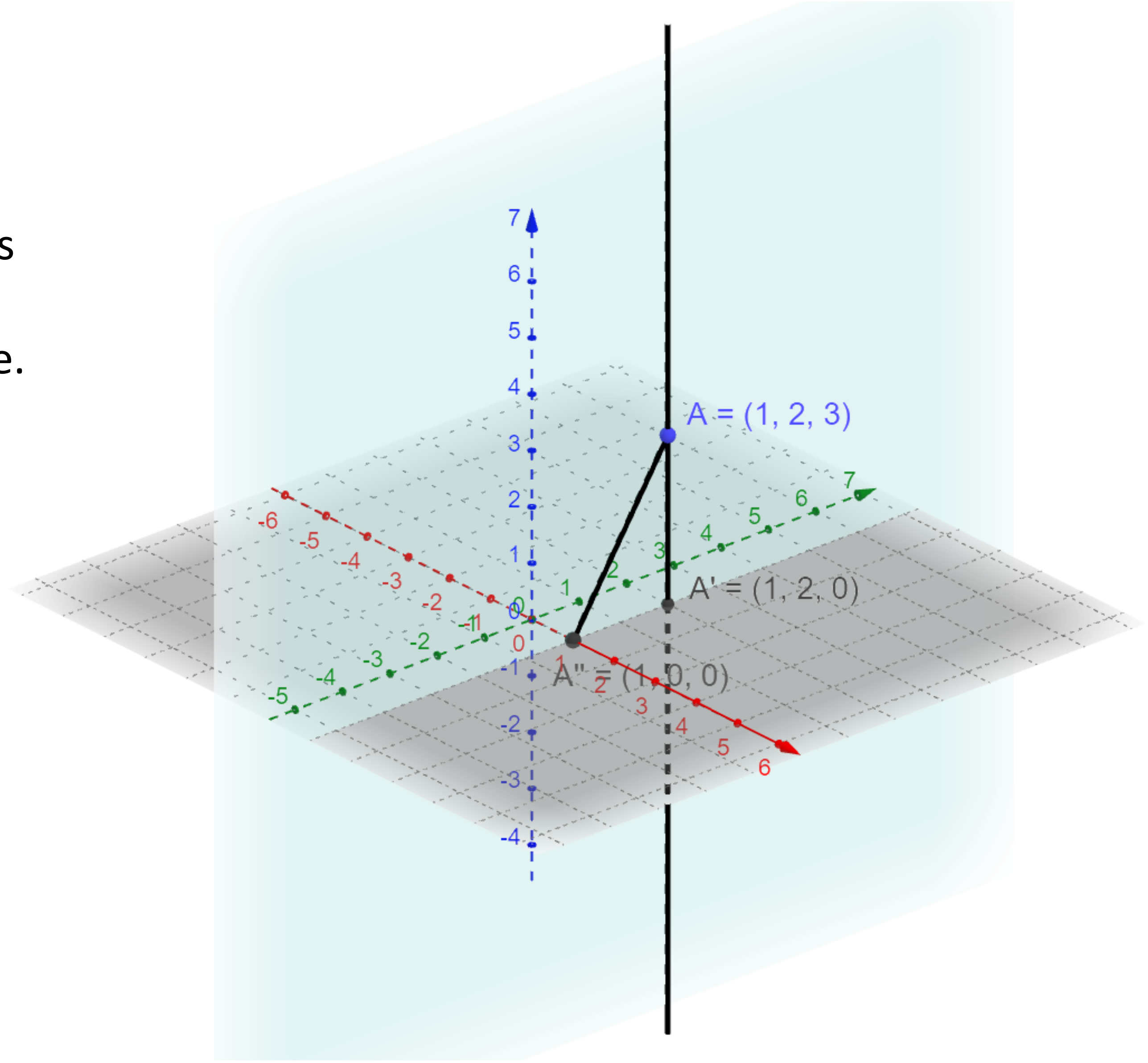
a) Pisteen projektio xy −tasolle saadaan muuttamalla pisteen z −koordinaatti nollaksi.

Pisteen $A = (1, 2, 3)$ projektio xy −tasolle on siis $A' = (1, 2, 0)$.
Tämä on lähinnä pistettä A oleva xy −tason piste.

b) Pisteen projektio x −akselille saadaan muuttamalla pisteen y − ja z −koordinaatit nolliksi.

Pisteen $A = (1, 2, 3)$ projektio x −akselille on siis $A'' = (1, 0, 0)$.

Tämä on lähinnä pistettä A oleva x −akselin piste. Yleisesti pisteen projektio suoralle saadaan kulkemalla pisteestä suoralle kohtisuorasti eli suoralle (tässä tapauksessa x −akselille) kohtisuoraa tasoa pitkin.



c) Pisteen projektio tasolle on pisteen kautta kulkevan tason normaalisuoran ja tason leikkauspiste

Tason $2x + 3y - z + 1 = 0$ (eräs) normaalivektori on $\bar{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Pisteen $(1, 2, 3)$ kautta kulkeva tason normaalin parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$$

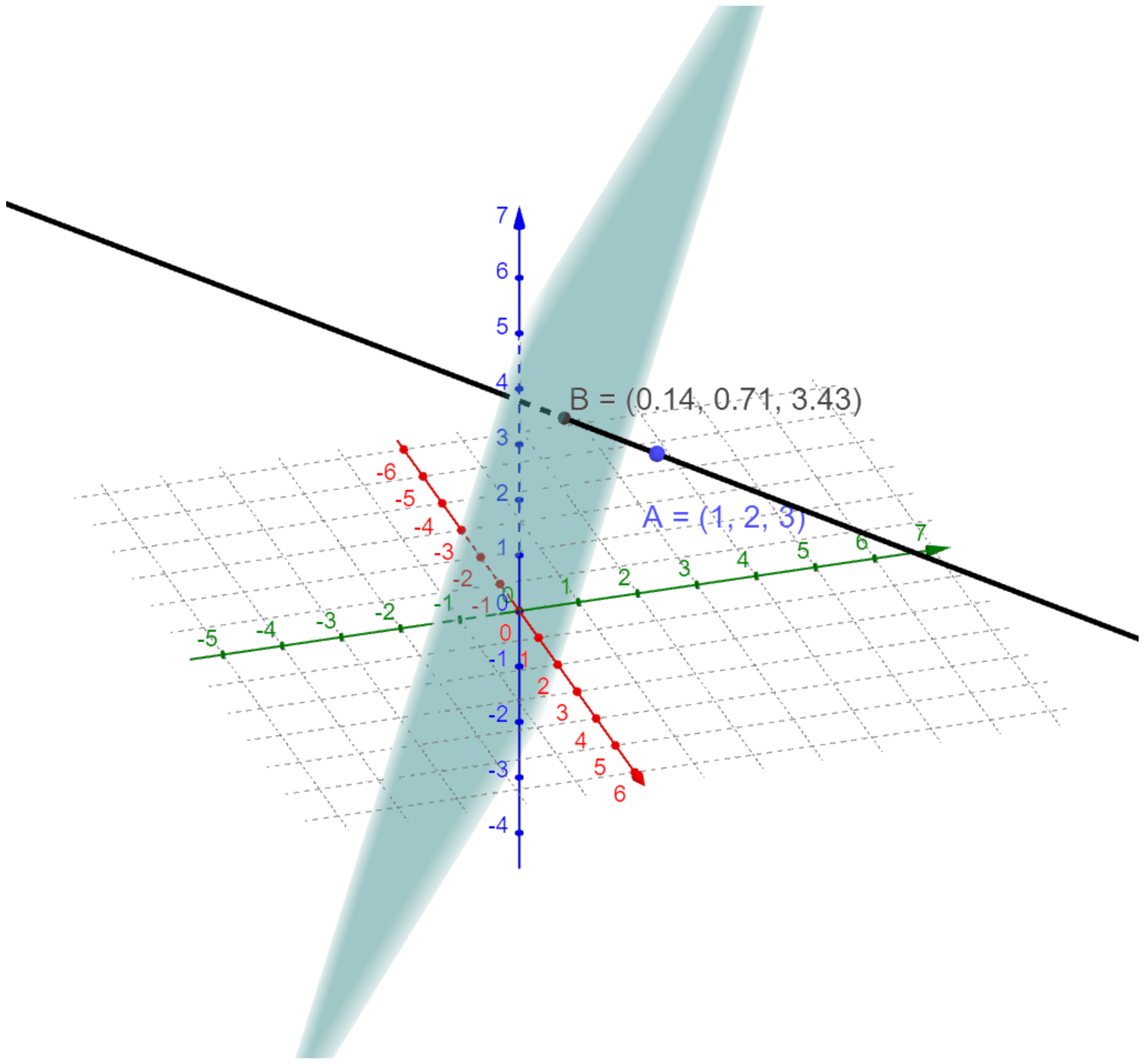
Sijoitetaan suoran pisteiden koordinaatit tason yhtälöön ja ratkaistaan parametri t laskinohjelmalla. Tulokseksi saadaan $t = -\frac{3}{7}$. Tätä parametrin arvoa vastaava suoran piste on suoran ja tason leikkauspiste.

$x:=1+2\cdot t$	$2\cdot t+1$
$y:=2+3\cdot t$	$3\cdot t+2$
$z:=3-t$	$3-t$
$\text{solve}(2\cdot x+3\cdot y-z+1=0,t)$	$t=\frac{-3}{7}$

Sijoitetaan parametri koordinaattien x, y ja z yhtälöihin.

Projektiopiste on $\left(\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, \frac{24}{7}\right)$.

$t:=\frac{-3}{7}$	$\frac{-3}{7}$
x	$\frac{1}{7}$
y	$\frac{5}{7}$
z	$\frac{24}{7}$


B = (0.14, 0.71, 3.43)
A = (1, 2, 3)