Avaruuden vektorit

- Kolmiulotteisen avaruuden vektorin $\bar{u}$ *komponenttiesitys* on

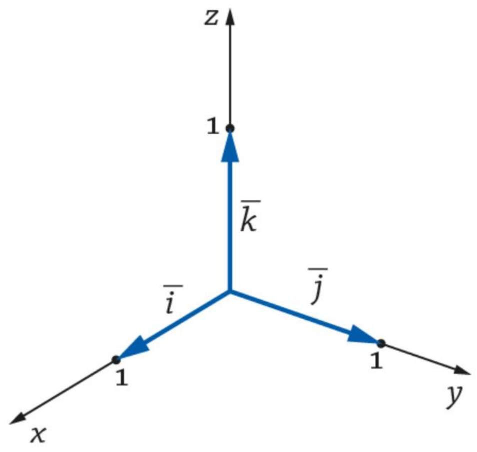
$$\bar{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Vektori $\bar{u}$ kulkee x yksikköä x −akselin suuntaan, y yksikköä y −akselin suuntaan ja z yksikköä z −akselin suuntaan.

- Vektorit voidaan esittää myös positiivisten koordinaattiakselien suuntaisten kantavektorien $\bar{\imath}, \bar{\jmath}$ ja $\bar{k}$ avulla. Näiden vektorien pituus on 1, joten ne ovat myös *yksikkövektoreita*.

$$\bar{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\jmath} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

jolloin *kantavektoriesitys* on $\bar{u} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$.



- Kolmiulotteisille vektoreille yleistyy vastaavat laskusäännöt kuten xy −tason vektoreillekin (ks. oppikirja s. 74 ja s. 79 sekä tarvittaessa MAA4 muistiinpanot aiheesta)

t. 311, s. 83

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -r \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} -2r \\ 4 \\ 2r^2 \end{bmatrix}$$

a) $\bar{u} \perp \bar{v} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 1 \cdot (-2r) + (-r) \cdot 4 + \sqrt{2} \cdot 2r^2 = 0$$

$$-2r - 4r + 2\sqrt{2}r^2 = 0$$

$$-6r + 2\sqrt{2}r^2 = 0$$

$$r(2\sqrt{2}r - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r = 0 \ \text{ tai } \ 2\sqrt{2}r - 6 = 0$$

$$r = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kun $r = 0$ tai $r = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

a) $\bar{u} \parallel \bar{v} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u} = t\bar{v}$ jollakin reaaliluvulla t

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -r \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2r \\ 4 \\ 2r^2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -r \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2rt \\ 4t \\ 2r^2t \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = -2rt \\ -r = 4t \\ \sqrt{2} = 2r^2t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad r = -4t$$

Sijoitetaan ylimpään ja alimpaan yhtälöön.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -2 \cdot (-4t) \cdot t \\ \sqrt{2} = 2 \cdot (-4t)^2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 8t^2 \\ \sqrt{2} = 32t^3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = \frac{1}{8}\, t = \pm\sqrt{\frac{1}{8}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Sijoitetaan positiivinen ratkaisu alempaan yhtälöön (negatiivinen on selvästi epätosi).

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} = 32 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} = 32 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{64} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Yhtälö on aina tosi.

Vektorit ovat yhdensuuntaisia, kun $t = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Parametrin r arvo on tällöin $r = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{2}$.

TI-Nspire:

$$u:=\begin{bmatrix}1\\ -r\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1\\ -r\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$v:=\begin{bmatrix}-2\cdot r\\ 4\\ 2\cdot r^2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-2\cdot r\\ 4\\ 2\cdot r^2\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{dotP}(u,v) \qquad 2\cdot\sqrt{2}\cdot r^2-6\cdot r$$

$$\mathrm{solve}\left(2\cdot\sqrt{2}\cdot r^2-6\cdot r=0,r\right) \qquad r=0 \text{ or } r=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{solve}(u=t\cdot v,t) \qquad t=\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ and } r=-\sqrt{2}$$

Pystyvektoriin saa z –komponentin painamalla alt+enter.