Liikemäärä ja impulssi

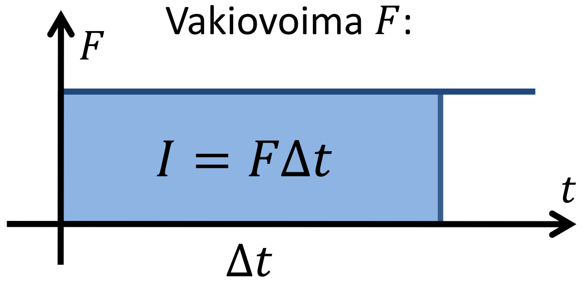
- Liikemäärä $\bar{p}$ on kappaleen nopeuden $\bar{v}$ ja massan m tulo:

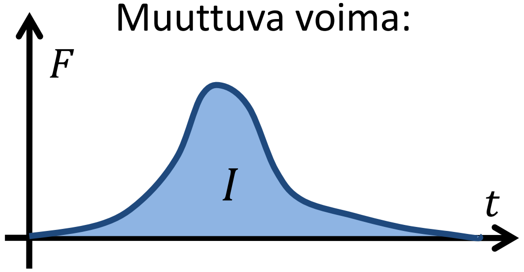
$$\bar{p} = m\bar{v}$$

  - Vektorisuure (suunta = nopeuden suunta)
  - Liikemäärän yksikkö: $[p] = [m] \cdot [v] = 1\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \mathrm{m/s} = 1\ \mathrm{kgm/s}\ (= 1\ \mathrm{Ns})$
- Vakiovoiman impulssi $\bar{I}$ on kappaleeseen kohdistuvan voiman $\bar{F}$ ja vaikutusajan Δt tulo:

$$\bar{I} = \bar{F}\Delta t$$

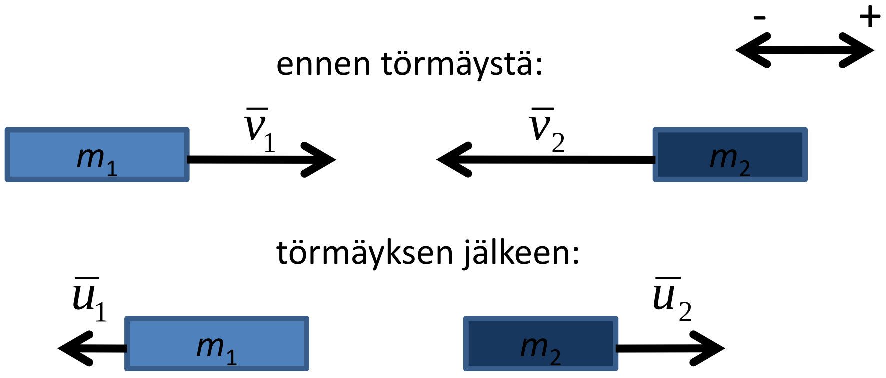
  - Vektorisuure (suunta = kappaleeseen kohdistuvan kokonaisvoiman suunta)
  - Impulssin yksikkö: $[I] = [F] \cdot [\Delta t] = 1\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{Ns}$
- Impulssi saadaan $(t, F) -$ koordinaatistossa fysikaalisena pinta-alana





Impulssiperiaate ja liikemäärän säilymislaki

- Impulssiperiaate: $\bar{I} = \Delta\bar{p}$
  - Kokonaisvoiman impulssi aiheuttaa kappaleen liikemäärän muutoksen
- Liikemäärän säilymislaki
  - Kokonaisliikemäärä säilyy eristetyssä systeemissä
  - Siis kokonaisliikemäärä alussa = kokonaisliikemäärä lopussa
  - Muista etumerkit! (merkkisopimuksen mukaan)



Vektorimuoto:

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2$$

Skalaarimuoto:

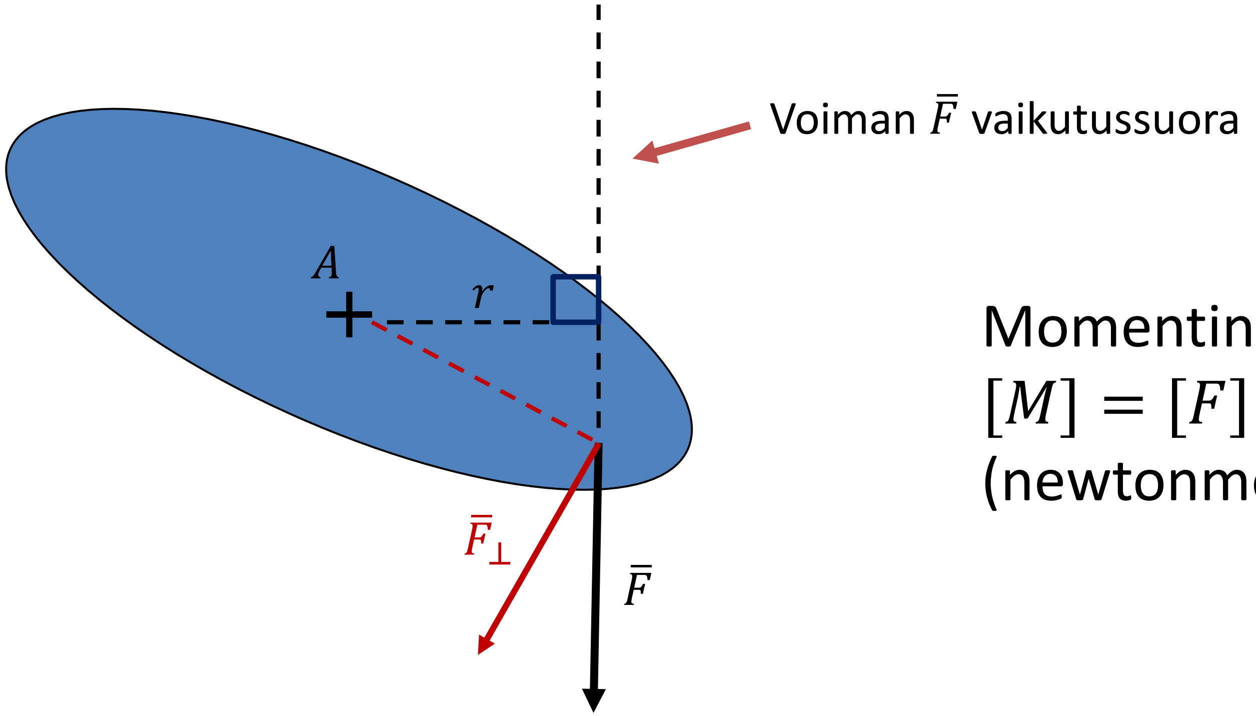
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2$$

Törmäyksien lajit

- Täysin kimmoisa törmäys:
  - Kappaleiden muoto ei muutu
  - Kappaleet eivät tartu toisiinsa
  - Liikemäärä säilyy
  - Liike-energia säilyy
- Täysin kimmoton törmäys:
  - Kappaleet tarttuvat toisiinsa
  - Liikemäärä säilyy
  - Liike-energia **EI** säily!
- Todellisuudessa törmäys on yleensä näiden välimuoto

Voiman momentti

- Momentti on voiman ja voiman varren tulo
- Täsmällisemmin määriteltynä voiman $\bar{F}$ *momentti* (akselin A suhteen) on $M_A = Fr$, missä r on voiman *vaikutussuoran* (kohtisuora) etäisyys akselista A
  - Voiman varren sijasta voidaan käyttää myös voiman vaikutuspisteen ja akselipisteen lyhintä etäisyyttä, jos voimasta lasketaan etäisyysjanalle kohtisuora komponentti

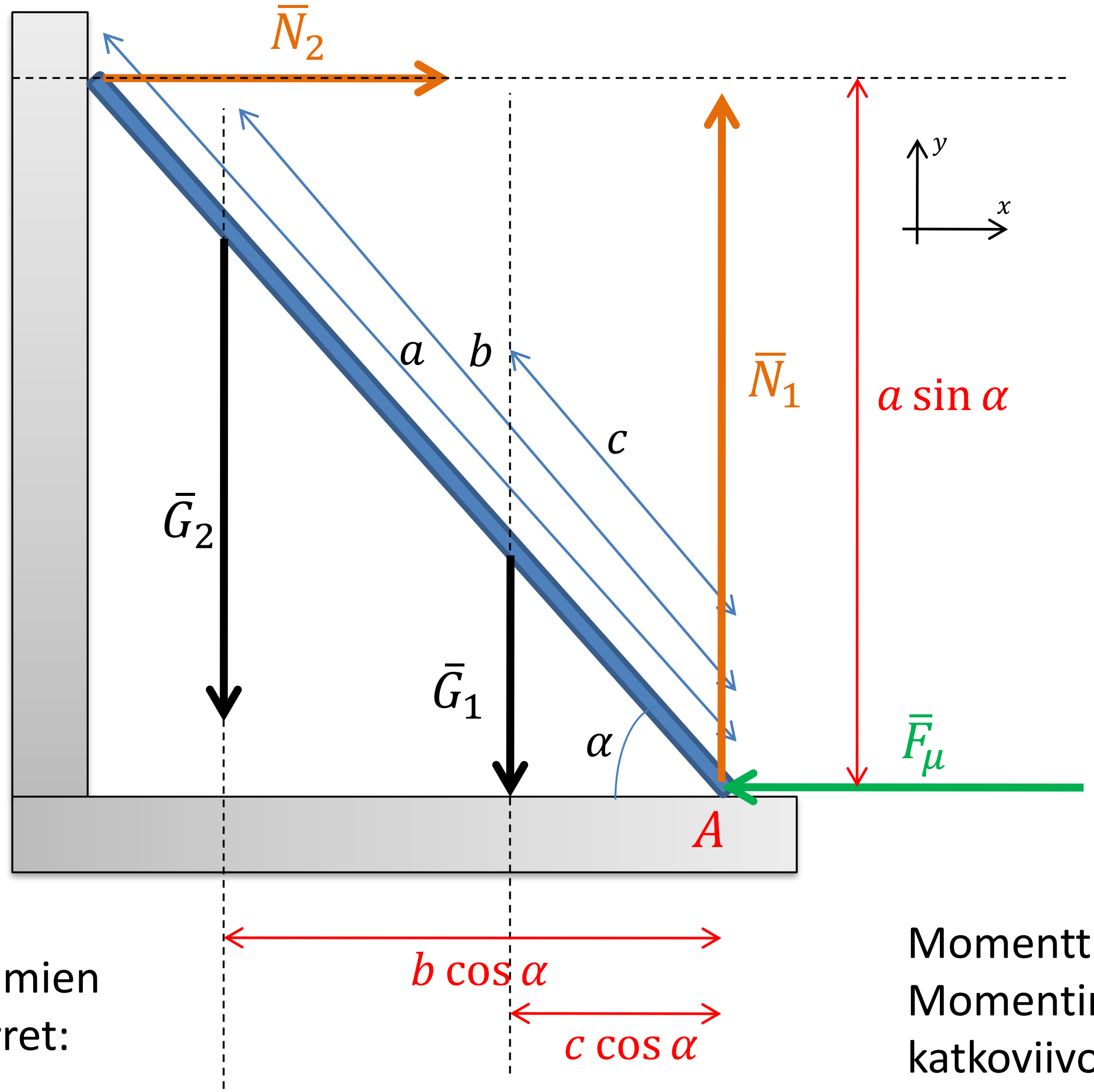


Momentin yksikkö on
$[M] = [F] \cdot [r] = 1\ \mathrm{Nm}$
(newtonmetri)

Statiikan tehtävien ratkaisuohje

- Piirrä *voimakuvio* tutkittavasta kappaleesta
  - Merkitse kaikki kappaleeseen vaikuttavat voimat kuvaan
    - Painovoima $\bar{G}$ suoraan alaspäin (painopisteestä)
    - Tukivoimat $\bar{N}$ kohtisuorasti pintaa vastaan
    - Kitkavoimat $\bar{F}_\mu$ liikesuuntaa vastaan (Mihin suuntaan kappale liikkuisi, jos kitkaa ei olisi?)
    - Jännitysvoimat $\bar{T}$ lankojen/vaijerien suuntaisesti (molemmissa päissä aina sama jännitys)
  - Valitse positiiviset etenemissuunnat ($x-$ ja $y-$akselit)
- Muodosta tasapainoehto etenemisen suhteen eli liikeyhtälö $\sum \bar{F} = \bar{0}$ (NII)
  - Vektorimuodossa
  - Skalaarimuodossa (muista etumerkit)
  - Komponentteihin (x ja y) jako tarvittaessa
- Muodosta tasapainoehto pyörimisen suhteen eli momenttiehto $\sum M = 0$
  - Akseli, jonka suhteen momentit lasketaan, kannattaa valita siten, että mahdollisimman monen voiman vaikutussuora kulkee tämän akselipisteen kautta
  - Valitse positiivinen kiertosuunta momenteille
- Ratkaise tasapainoehdoista muodostetut yhtälöt (kysytyn suureen suhteen)
  - Jos jokin voima saa negatiivisen arvon, niin sen suunta on vastakkainen voimakuviossa oletetusta
  - Pohdi vastauksen mielekkyyttä ja tarkista ovatko yksiköt oikein

Yo-tehtävä K1993/4: Tikkaat nojaavat lähes kitkattomasti pystysuoraan seinään siten, että niiden kaltevuuskulma on $55°$. Tikkaiden massa on $28\ \mathrm{kg}$ ja pituus $4{,}80\ \mathrm{m}$. Tikkaiden painopiste sijaitsee $2{,}00\ \mathrm{m}$:n etäisyydellä alapäästä. Kuinka suuri pitää tikkaiden ja lattian välisen kitkakertoimen olla, jotta $65\ \mathrm{kg}$:n painoinen henkilö voi seisoa $1{,}20\ m$:n etäisyydellä tikkaiden yläpäästä (3. puola) ilman, että tikkaat alkavat liukua?



Voimien varret:

$G_1 = m_1 g =$ tikkaiden paino
$G_2 = m_2 g =$ henkilön paino
$N_1 =$ lattian tukivoima
$N_2 =$ seinän tukivoima
$F_\mu =$ lattian kitka
$a = 4{,}80\ \mathrm{m}$
$b = 4{,}80\ \mathrm{m} - 1{,}20\ \mathrm{m} = 3{,}60\ \mathrm{m}$
$c = 2{,}00\ \mathrm{m}$
$\alpha = 55°$

Tasapainoehdot skalaarimuodossa(NII):

$$x:\quad N_2 - F_\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_\mu = N_2$$
$$y:\quad N_1 - G_1 - G_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = G_1 + G_2$$

Momenttiakseli A:
Momentin aiheuttavien voimien G_1, G_2 ja N_2 vaikutussuorat katkoviivoilla

Momenttiehto:

(positiivinen kiertosuunta vastapäivään)

$$\sum M_A = G_1 c\cos\alpha + G_2 b\cos\alpha - N_2 a\sin\alpha = 0$$

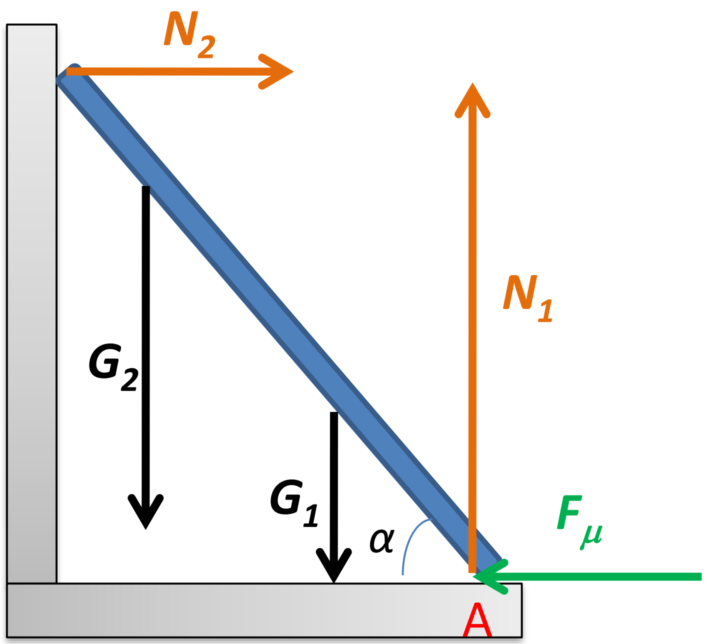
$$N_2 a\sin\alpha = G_1 c\cos\alpha + G_2 b\cos\alpha$$

$$N_2 = \frac{G_1 c\cos\alpha + G_2 b\cos\alpha}{a\sin\alpha} = F_\mu$$

$$= \mu N_1 = \mu(G_1 + G_2) = \mu(m_1 g + m_2 g)$$

$$\mu = \frac{(m_1 gc + m_2 gb)\cos\alpha}{(m_1 g + m_2 g)a\sin\alpha} = \frac{m_1 c + m_2 b}{(m_1 + m_2)a\tan\alpha}$$

$$\mu = \frac{28\,\mathrm{kg}\cdot 2{,}00\,\mathrm{m} + 65\,\mathrm{kg}\cdot 3{,}60\,\mathrm{m}}{(28\,\mathrm{kg} + 65\,\mathrm{kg})\cdot 4{,}80\,\mathrm{m}\cdot\tan 55^\circ} \approx 0{,}4549$$



V: Kitkakertoimen on oltava vähintään 0,46.

Normaalikiihtyvyys ja -voima

- Tasaisessa ympyräliikkeessä oleva kappale on kiihtyvässä liikkeessä, koska nopeuden suunta muuttuu koko ajan
- Kiihtyvyyden suunta on kohti ympyrän keskipistettä
- Tätä kiihtyvyyttä kutsutaan *normaalikiihtyvyydeksi* (tai keskeiskiihtyvyydeksi) ja se saadaan kaavasta

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$$

- Tasaisen ympyräliikkeen liikeyhtälö

$$\boxed{\sum \bar{F} = m\bar{a}_n}$$

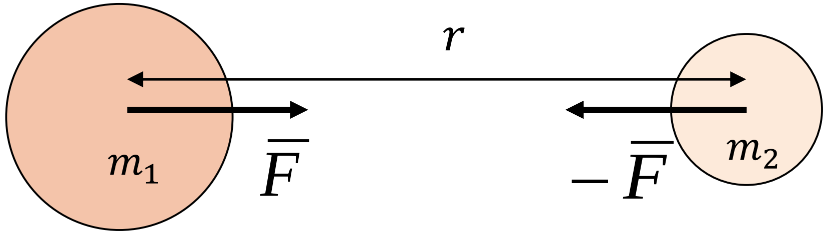
- Tarvittavan normaalivoiman suuruus:

$$F = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

Gravitaatiolaki

- Newtonin päätelmät, joiden avulla hän kehitti gravitaatiolain:
  - Gravitaatiovoima F on suoraan verrannollinen kappaleiden massoihin ($F \sim m_1$, $F \sim m_2$)
  - Gravitaatiovoima on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön ($F \sim 1/r^2$)
- Gravitaatiolaki (pistemäisille) kappaleille:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



  - Tässä $\gamma = \textit{gravitaatiovakio} = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$
- Gravitaatiokentän voimakkuus määritellään ”testikappaleeseen” vaikuttavan gravitaatiovoiman ja kappaleen massan m suhteena $\frac{F}{m}$
- Etäisyydellä r Maan (massa = M) keskipisteestä:

$$\frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} = g \quad (\approx 9{,}81\ \frac{m}{s^2}, \text{kun } r = 0 \text{ maapallon säde})$$

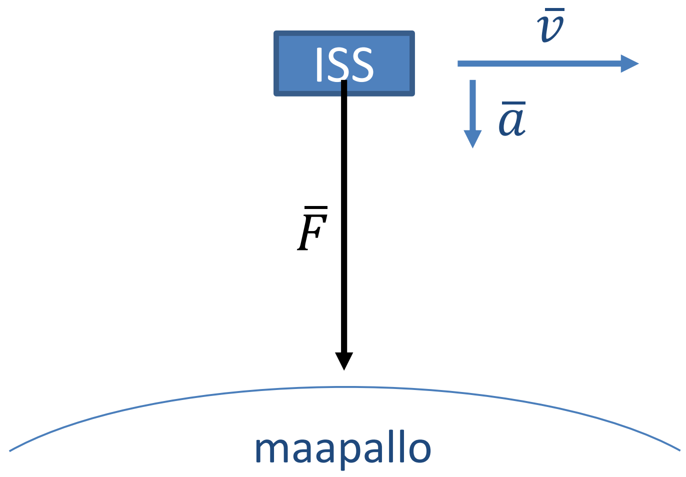
K2017/10 Maapalloa kiertävä kansainvälinen ISS-avaruusasema on ympyräradalla, jonka etäisyys maanpinnasta on 405 km.

a) Kuinka suuri on avaruusaseman nopeus? Piirrä kuvio, josta ilmenevät avaruusasemaan vaikuttavat voimat sekä avaruusaseman nopeus ja kiihtyvyys. (3 p.)
b) Kuinka kauan kestää avaruusaseman yksi kierros maapallon ympäri? Maapallon pyörimistä ei huomioida. (1 p.)
c) Selitä, miksi avaruusasemalla oleva ihminen kokee olevansa painoton. (2 p.)

a) Maa kohdistaa avaruusasemaan gravitaatiovoiman

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2},$$

missä M on Maan massa, m avaruusaseman massa ja r avaruusaseman etäisyys maapallon keskipisteestä. Muita voimia ei tilanteessa vaikuta. ($405\,\mathrm{km}$ korkeudella ilmakehä on äärimmäisen ohut, joten ilmanvastus voidaan olettaa nollaksi.)



Gravitaatiovoiman F ja kiihtyvyyden a suunta on kohti maapallon keskipistettä.

Nopeuden v suunta on ympyräradan tangentin suuntainen.

Taulukkoarvot (MAOL, s. 120):

Maan massa: $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$

Maan ekvaattorisäde: $\mathrm{R} = 6378140\ \mathrm{m}$

Avaruusaseman etäisyys maapallon keskipisteestä:
$r = R + h = 6\,378\,140\ \mathrm{m} + 405\,000\ \mathrm{m} = 6\,783\,140\ \mathrm{m}.$

Avaruusaseman liikeyhtälö on Newtonin II lain mukaisesti $\sum \bar{F} = m\bar{a}_n$.

Koska tilanteessa avaruusasemaan vaikuttaa vain yksi voima, gravitaatio, voidaan liikeyhtälö esittää skalaarimuodossa seuraavasti:

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Avaruusaseman massa supistuu pois!

$$\gamma \frac{M}{r} = v^2$$

$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \sqrt{6{,}67428 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6\,783\,140\ \mathrm{m}}} \approx 7666{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx \underline{\underline{7670\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

b) Avaruusasema on tasaisessa ympyräliikkeessä, joten sen nopeus saadaan tasaisen liikkeen kaavalla:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} \approx \frac{2\pi \cdot 6\,783\,140\ \mathrm{m}}{7666{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 5560\ \mathrm{s} \approx 92{,}6\ \mathrm{min}$$

c) Avaruusasema ja asemalla olevat ihmiset ovat vapaassa putoamisliikkeessä Maan gravitaatiokentässä. Painottomuuden tunne ei siis johdu siitä, että painovoima ei vaikuttaisi!

Vapaassa pudotuksessa ihmisen kiihtyvyys on sama kuin avaruusaseman, joten ihminen ei tunne tukivoimaa. Tästä aiheutuu painottomuuden tunne, vaikka ihmiseen kohdistuvan gravitaatiovoiman suuruus ei ole juurikaan pienempi.

(Gravitaatio on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön, joten painovoima on

$$\left(\frac{6378140\ \mathrm{m}}{6\,378\,140\ \mathrm{m} + 405000\ \mathrm{m}}\right)^2 \approx 0{,}884 \approx 88\ \%$$

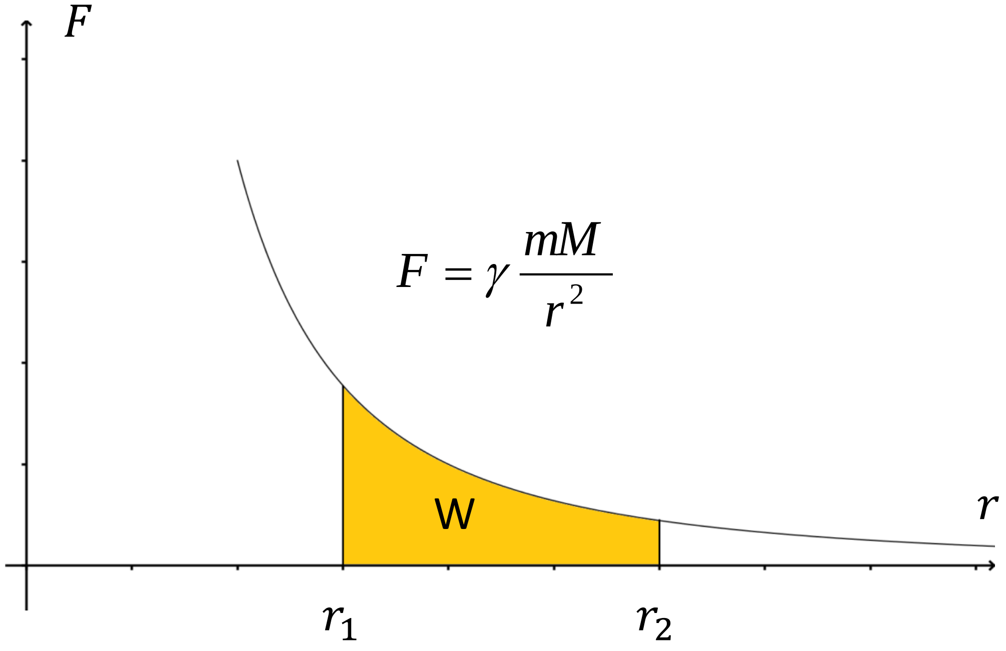
normaaliin verrattuna.)

Gravitaation potentiaalienergia

- Maan gravitaatiokentässä tehty työ W siirryttäessä etäisyydeltä r_1 etäisyydelle r_2 ei ole suoraan verrannollinen siirtymään, koska gravitaatiovoima heikkenee etäisyyden r kasvaessa.
  - Kaava $E = mgh$ toimii vain korkeuden h ollessa pieni maan säteeseen verrattuna
- Gravitaation potentiaalienergialle voidaan johtaa (integroimalla) lauseke

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{r}$$

(Äärettömän kaukana $E_p = 0$.)



Tehty työ W:

$$W = \Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$$

$$= -\gamma \frac{mM}{r_2} - \left(-\gamma \frac{mM}{r_1}\right)$$

$$= \gamma mM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Ensimmäinen pakonopeus

- Ensimmäinen pakonopeus on nopeus, joka kappaleelle on taivaankappaleen pinnalla annettava, jotta kappale jäisi kiertoradalle
- Lasketaan 1. pakonopeus Maassa:
  - Gravitaatiovoima toimii keskeisvoimana:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

$$\gamma \frac{M}{R^2} = \frac{v^2}{R}, \quad \text{josta saadaan} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$

- Sijoittamalla gravitaatiovakion γ, maan massan M ja säteen R laskukaavaan, saadaan ensimmäiseksi pakonopeudeksi Maasta n. $7{,}9\ \mathrm{km}/s$.
- Pakonopeus on Taivaankappaleille ominainen vakio (riippuu massasta ja säteestä)
- Todellisuudessa ilmakehän vuoksi nopeuden täytyy olla suurempi

Toinen pakonopeus

- Toinen pakonopeus on nopeus, joka kappaleelle on taivaankappaleen pinnalla annettava, jotta kappale vapautuisi kokonaan taivaankappaleen vetovoimakentästä
- Lasketaan 2. pakonopeus Maassa:
  - Sovelletaan energian säilymislakia ($E_k + E_p =$ vakio)
  - Lopputilanteessa gravitaation potentiaalienergia ja liike-energia $= 0$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{mM}{R} = 0$$

$$v^2 = 2\gamma\frac{M}{R^2}, \quad \text{josta saadaan} \quad v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}$$

- Sijoittamalla gravitaatiovakion γ, maan massan M ja säteen R laskukaavaan, saadaan toiseksi pakonopeudeksi maasta n. $11{,}2\ \mathrm{km}/s$.
- Toinen pakonopeus on myös taivaankappaleille ominainen vakio, joka riippuu taivaankappaleen massasta ja säteestä.