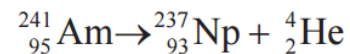


Palovaroittimessa on α -aktiivista ^{241}Am -isotooppia, jonka hajoamisreaktio on



- Palovaroittimen ^{241}Am -aktiivisuus on 38 kBq. Kuinka monta grammaa ^{241}Am -isotooppia varoittimessa on?
- Varoitin lakkaa toimimasta, jos sen aktiivisuus laskee alle 25 kBq:n. Kuinka pitkä aika tähän kuluu?
- Laske alfahiukkasen kineettinen energia ^{241}Am -isotoopin alfahajoamisessa.
 ^{241}Am -isotoopin puoliintumisaika on 432 a ja sen atomimassa 241,05682 u.

Moolimassa (=atomimassa) on $M = 241,05682 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.

Puoliintumisaika on $T_{1/2} = 432 \text{ a}$.

a) Ratkaistaan massa aktiivisuuden kaavasta $A = \lambda N$, missä hajoamisvakio $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ ja hiukkasten määrä $N = nN_A = \frac{m}{M}N_A$.

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{M} N_A \Leftrightarrow m = \frac{AT_{1/2}M}{N_A \ln 2}$$

$$m = \frac{AT_{1/2}M}{N_A \ln 2} = \frac{38\,000 \text{ Bq} \cdot 432 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 241,05682 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}{6,02214 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \cdot \ln 2}$$

$$\approx 2,9896 \cdot 10^{-7} \text{ g} \approx 0,30 \mu\text{g}$$

TI-Nspire:

$$\frac{38000 \cdot \text{Hz} \cdot 432 \cdot \text{yr} \cdot 241.05682 \cdot \frac{\text{gm}}{\text{mol}}}{N_A \cdot \ln(2)}$$

$$2.991610812\text{E-}10 \cdot \text{kg}$$

V: Palovaroittimessa on 0,30 μg ^{241}Am -isotooppia.

Toinen laskutapa a-kohtaan:

Ratkaistaan massa m vastaavalla tavalla aktiivisuuden kaavasta $A = \lambda N$, missä hajoamisvakio $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.

Ydinten määrä N on isotoopin kokonaismassa m jaettuna yhden amerikium-atomin massalla $m(\text{Am}) = 241,05682$ eli

$$N = \frac{m}{m(\text{Am})}.$$

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{m(\text{Am})} \Leftrightarrow m = \frac{AT_{1/2}m(\text{Am})}{\ln 2}$$

$$\frac{38000 \cdot \text{Hz} \cdot 432 \cdot \text{yr} \cdot 241.05682 \cdot \text{amu}}{\ln(2)}$$

$$2.9916108\text{E-}10 \cdot \text{kg}$$

b) Varoitin lakkaa toimimasta, jos sen aktiivisuus laskee alle 25 kBq:n. Kuinka pitkä aika tähän kuluu?

b) Merkitään nyt alkuperäinen aktiivisuus $A_0 = 38 \text{ kBq}$.

Aktiivisuus A vähenee eksponentiaalisesti hajoamislain $A = A_0 e^{-\lambda t}$ mukaisesti. Ratkaistaan yhtälöstä t , kun $A = 25 \text{ kBq}$.

$$e^{-\lambda t} = \frac{A}{A_0} \quad \Bigg| \ln$$

$$-\lambda t = \ln \frac{A}{A_0}$$

$$t = \frac{\ln \frac{A}{A_0}}{-\lambda} = \frac{\ln \frac{A}{A_0}}{-\ln 2} T_{1/2} = \frac{\ln \frac{25 \cancel{\text{kBq}}}{38 \cancel{\text{kBq}}}}{-\ln 2} \cdot 432 \text{ a} \approx 260,96 \text{ a} \approx 260 \text{ a}$$

V: Aktiivisuus laskee 260 vuodessa arvoon 25 kBq.

TI-Nspire (yksiköitä ei kannata tässä laittaa):

$$\text{solve} \left(25 = 38 \cdot e^{\frac{-\ln(2)}{432} \cdot t}, t \right) \quad t = 260.958811825$$

c) Lasketaan reaktioenergia alfahajoamisessa ${}^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow {}^{237}_{93}\text{Np} + {}^4_2\text{He}$.

$$Q = [m_{Am} - 95m_e - (m_{Np} - 93m_e + m_{He} - 2m_e)] \cdot c^2$$

Muista, että tässä lasketaan *ytimen* massavajetta, joten vähennä atomin massoista elektronien massat!

$$Q = [m_{Am} - m_{Np} - m_{He}] \cdot c^2$$

$$Q = [241,05682 \text{ u} - 237,048167 \text{ u} - 4,0026033 \text{ u}] \cdot c^2$$

$$Q = 0,0060497 \text{ u} \cdot c^2 = 0,0060497 \frac{931,5 \text{ MeV}}{1} \cdot 1^2 \approx 5,6353 \text{ MeV} \quad (\approx 9,0287 \cdot 10^{-13} \text{ J})$$

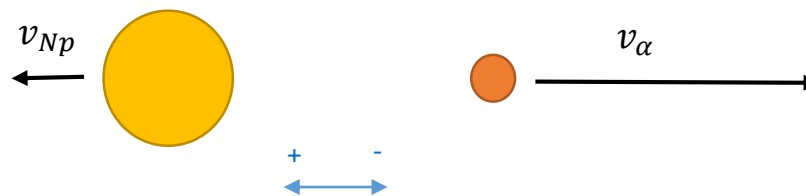
Oletetaan, että (likimain) kaikki reaktiossa vapautuva energia muuttuu hiukkasten liike-energiaksi. Näin saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}m_{Np}v_{Np}^2 + \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{\alpha}^2 = Q$$

Tässä pitää käyttää alfahiukkasen massaa m_{α} . Myös m_{Np} tarkoittaa nyt neptunium-ytimen massaa.

Oletetaan lisäksi, että Amerikium-ydin on kutakuinkin levossa ennen hajoamistaan. Tällöin liikemäärän säilymisen perusteella:

$$m_{Np}v_{Np} - m_{\alpha}v_{\alpha} = 0$$



Yhtälöpari voidaan ratkaista laskimella, mutta muista, että massojen täytyy olla kilogrammoina ja energian jouleina! Siistimpi tapa (vähemmän sijoittamista ja yksikköjen muuntamista) on ratkaista yhtälö niin, että nopeuksia ei tarvita välituloksina.

Liikemäärän yhtälöstä saadaan $v_{Np} = \frac{m_\alpha}{m_{Np}} v_\alpha$. Sijoitetaan tämä energiayhtälöön.

$$\frac{1}{2} m_{Np} \left(\frac{m_\alpha}{m_{Np}} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = Q$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m_{Np}} \frac{m_\alpha^2}{\cancel{m_{Np}^2}} v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = Q$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \frac{m_\alpha}{m_{Np}} + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = Q$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{m_\alpha}{m_{Np}} + 1 \right) = Q$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = E_{k\alpha} = \frac{Q}{\frac{m_\alpha}{m_{Np}} + 1} = \frac{5,6353 \text{ MeV}}{\frac{4,001506 \cancel{\mu}}{237,048167 \cancel{\mu} - 93 \cdot 5,485799 \cdot 10^{-4} \cancel{\mu}} + 1}$$

$$E_{k\alpha} \approx 5,5417 \text{ MeV} \approx 5,5 \text{ MeV}$$

V: Alfahiukkasen liike-energia on 5,5 MeV.

TI-Nspire:

$$237.048167 \cdot \text{amu} \rightarrow m1$$

$$3.935430184 \cdot 10^{-25} \cdot \text{kg}$$

$$4.001506 \cdot \text{amu} \rightarrow m2$$

$$6.644656932 \cdot 10^{-27} \cdot \text{kg}$$

$$\text{solve} \left(\begin{cases} \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1^2 + \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2^2 = 0.0060497 \cdot \text{amu} \cdot c^2 \\ m1 \cdot v1 - m2 \cdot v2 = 0 \end{cases}, v1, v2 \right) | v2 > 0$$

$$v1 = 276016.7806 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ and } v2 = 16347642.64 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m2 \cdot \left(16347642.64 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

$$8.878770659 \cdot 10^{-13} \cdot \text{J}$$

$$8.8787706586506 \cdot 10^{-13} \cdot \text{J} \rightarrow \text{eV}$$

$$5541692.809 \cdot \text{eV}$$

Tallennetaan neptunium-ytimen massa muuttujaksi m1.

Tallennetaan alfahiukkasen massa muuttujaksi m2.

Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_{Np} v_{Np}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = Q \\ m_{Np} v_{Np} - m_{\alpha} v_{\alpha} = 0, \end{cases}$$

missä $Q = 0,0060497 \text{ u} \cdot c^2$.

(Rajoitetaan nopeus positiiviseksi.)

Lasketaan alfahiukkasen liike-energia.

Muunnetaan tulos elektronivolteiksi.