

FY5 Näytetehtävien ratkaisut, 31.8.2022

1.

a) Jousi on harmoninen värähtelijä, jonka värähdysaika saadaan kaavalla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

missä m on punnusten massa ja k jousivakio. Ratkaistaan värähdysajan kaavasta massa, kun värähdysaika $T = 1,0$ s.

$$m = \frac{T^2}{4\pi^2} k = \frac{(1,0 \text{ s})^2}{4\pi^2} \cdot 12,5 \frac{\text{N}}{\text{m}} \approx 0,317 \text{ kg}.$$

Punnuksista saatava lähin massa on 320 g, joka saadaan esimerkiksi kolmella sadan gramman ja yhdellä 20 gramman punnuksella.

b) Kun jouseen ripustetaan punnukset, jousi venyy uuteen tasapainoasemaansa. Paino ja jousivoima ovat tasapainoasemassa yhtä suuret.

Newtonin toisen lain mukaan voimien summa on nolla.

$$\Sigma F = \bar{0}$$

$$\bar{F} + \bar{G} = \bar{0}$$

$$F - G = 0$$

$$F = G$$

$$kx = mg$$

$$x = \frac{mg}{k} = \frac{0,170 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{12,5 \text{ N/m}} = 0,133416 \text{ m}$$

Jousi poikkeutetaan tasapainoasemasta pituuteen 35 cm. Poikkeutuksen suuruus on

$$0,35 \text{ m} - 0,15 \text{ m} - 0,133416 \text{ m} = 0,066584 \text{ m}$$

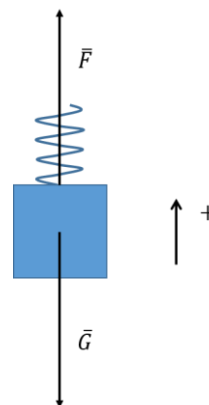
Poikkeutus muodostaa värähtelyn amplitudin ja kasvattaa punnusten potentiaalienergiaa. Punnusten värähdellessä mekaaninen energia säilyy. Värähtelyn aikana potentiaalienergia muuttuu punnusten liike-energiaksi ja päinvastoin. Liike-energia on suurin, kun punnukset ovat tasapainoasemassa.

$$E_p = E_k$$

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{12,5 \text{ N/m} \cdot (0,066584 \text{ m})^2}{0,170 \text{ kg}}} \approx 0,57095 \text{ m/s} \approx 0,57 \text{ m/s}$$



2.

a) Satelliittiin vaikuttaa ainoastaan gravitaatiovoima

$$G = \gamma \frac{Mm}{r^2}.$$

Satelliitti on ympyräradalla tasaisessa ympyräliikkeessä. Newtonin 2. lain mukaan

$$G = ma_n,$$

missä normaalikihtiivyyys

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Koska satelliitti liikkuu tasaisella vauhdilla, kierrosaika T voidaan ratkaista tasaisen nopeuden kaavalla

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}.$$

Ratkaistaan kierrosajan lauseke edellä mainituista yhtälöistä

$$\begin{aligned} \gamma \frac{mM}{r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\ \gamma \frac{mM}{r^2} &= \frac{m(2\pi r)^2}{rT^2} \\ \gamma \frac{M}{r^3} &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\ T &= \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}} \end{aligned}$$

$$r = 6357000 \text{ m} + 605000 \text{ m} = 6962000 \text{ m}$$

$$\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N kg}^2/\text{m}^2$$

$$M = 5,975 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$T = 5780,3640 \text{ s}$$

Vuorokauden pituus

$$t = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

Kierrosten lukumäärä vuorokaudessa

$$n = \frac{t}{T} \approx 14,9 \text{ kierrosta}$$

$$m1:=5.975 \cdot 10^{24} \cdot \text{_kg} \quad 5.975\text{E}24 \cdot \text{_kg}$$

$$r:=6357 \cdot \text{_km}+605 \cdot \text{_km} \quad 6.962\text{E}6 \cdot \text{_m}$$

$$\text{solve}\left(-Gc \cdot \frac{m1 \cdot m2}{r^2} = m2 \cdot \frac{v^2}{r}, v\right) | v > 0 \quad v=7568.41 \cdot \frac{\text{_m}}{\text{_s}}$$

$$v:=7568.41 \cdot \frac{\text{_m}}{\text{_s}} \quad 7568.41 \cdot \frac{\text{_m}}{\text{_s}}$$

$$t:=\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \quad 5779.75 \cdot \text{_s}$$

$$\frac{\text{_day}}{t} \quad 14.9487$$

- b) Geostationäärinen satelliitti kiertää Maata ekvaattoritasossa radalla, jonka kierrosaika on yhtä suuri kuin Maan pyöriäysaika akselinsa ympäri. Ratakäyrä on piste ekvaattorilla sen paikan yläpuolella, jonne satelliitti on sijoitettu.

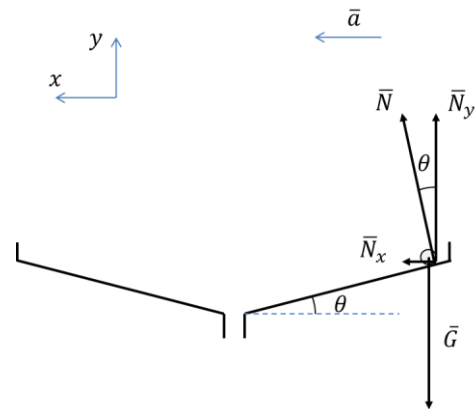
3.

- a) Suppiloa kiertävän kuulan voimakuvio:

G = paino

N = pinnan tukivoima

$\theta = 11^\circ$



Newtonin 2. lain mukaan $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Pystysuunnassa voimat tasapainottavat toisensa. Kuula liikkuu pitkin ympyrärataa tasaisella nopeudella, joten sillä on vain normaalikiiktyvyyttä $\vec{a}_n$. Tarkastellaan voimia erikseen x – ja y –suunnissa:

x :

y :

$$\bar{N}_x = m\bar{a}$$

$$\bar{N}_y + \bar{G} = 0$$

$$N_x = ma_n$$

$$N_y - G = 0$$

$$N \sin \theta = ma_n$$

$$N \cos \theta = mg$$

$$N = \frac{mg}{\cos \theta}$$

Yhdistämällä nämä saadaan ratkaistua kuulan nopeus, kun radan säde on $r = \frac{1,7}{2} \text{ m} = 0,85 \text{ m}$.

$$\frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = ma_n \Leftrightarrow a_n = g \tan \theta$$

$$\frac{v^2}{r} = g \tan \theta \Leftrightarrow v = \sqrt{gr \tan \theta}$$

$$v = \sqrt{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,85 \text{ m} \cdot \tan 11^\circ} \approx 1,2731 \text{ m/s} \approx 1,3 \text{ m/s}$$

- b) Pyörimisnopeus n on kierrosajan käänteisarvo:

$$n = \frac{1}{T}$$

Ratanopeus v on tasainen, joten

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

Pyörimisnopeudella saadaan tästä lauseke

$$n = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\sqrt{gr \tan \theta}}{2\pi r} = \frac{\sqrt{g \tan \theta}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$
$$n \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Kun kuulan kiertoradan säde pienenee, sen pyörimisnopeus kasvaa kääntäen verrannollisesti säteen neliöjuureen.

