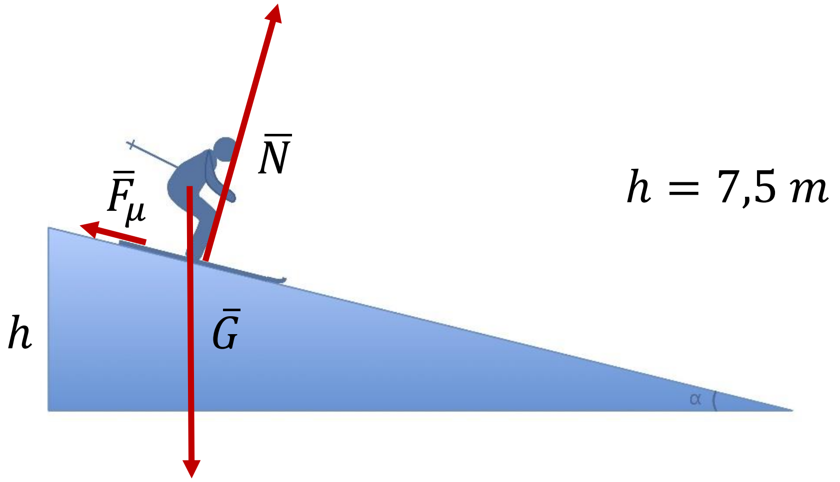
S2019/4 Mäenlaskua (15 p.)

Hiihtäjä lähtee laskemaan 7,5 m korkean mäen harjalta työntämättä itselleen alkuvauhtia. Mäen kulma vaakatason suhteen on α (katso kuva 4.A). Suksen ja lumen välinen liukukitkakerroin on 0,11. Ilmanvastus voidaan jättää huomioimatta.

4.1. Kuinka suuri hiihtäjän vauhti on mäen lopussa, kun α = 14°? (7 p.)

Hiihtäjään vaikuttavat voimat ovat:
Painovoima $\bar{G}$
Mäen tukivoima $\bar{N}$
Suksien ja lumen välinen liikekitka $\bar{F}_{\mu}$



Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan mekaaninen energia (liike-energia + potentiaalienergia) muuttuu liikekitkan tekemän työn W verran:

$$E_{p1} + E_{k1} + W = E_{p2} + E_{k2}$$

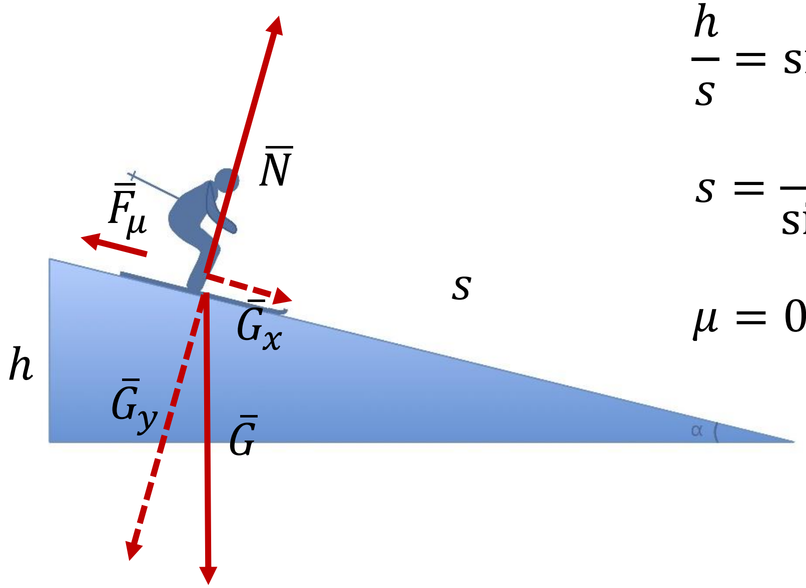
Valitaan potentiaalienergian nollataso rinteen matalimpaan kohtaan, jolloin potentiaalienergia lopussa on $E_{p2} = 0$.

Koska alkuvauhtia ei ole, niin hiihtäjän liike-energia alussa on $E_{k1} = 0$.

Liikekitka tekee työn liikesuuntaa vastaan, joten $W = -F_\mu s$, missä s on rinteen pituus.

Liikekitka on verrannollinen mäen tukivoimaan $F_\mu = \mu N$.

Hiihtäjä on tasapainossa rinnettä vastaan kohtisuorassa suunnassa, joten $N = G_y = mg\cos\alpha$.



$$\frac{h}{s} = \sin\alpha$$

$$s = \frac{\mathrm{h}}{\sin\alpha}$$

$$\mu = 0{,}11$$

Energiaperiaate voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$E_{p1} - F_\mu s = E_{k2}.$$

$$mgh - \mu mg\cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}mv^2$$

Josta saadaan nopeudeksi: $v = \sqrt{2gh\left(1 - \mu\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)} \approx 9{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(Käytä tarvittaessa solve-toimintoa)

$$\sqrt{2\cdot \_g\cdot 7.5\cdot \_m\cdot \left(1-0.11\cdot \frac{\cos(14)}{\sin(14)}\right)} \qquad 9.066499546\cdot \frac{\_m}{\_s}$$

4.2. Hiihtäjä lähtee liukumaan mäkeä alas, mikäli mäen kulma on 9° tai enemmän. Piirrä kuvaaja hiihtäjän tasamaalla liukumasta matkasta mäen kulman α funktiona välillä 9°...45°. (8 p.)

Tasamaalla hiihtäjään kohdistuvan tukivoiman suuruus on sama kuin hiihtäjän paino: $N = mg$

Häneen vaikuttaa nyt liikekitka $F_\mu = \mu mg$.

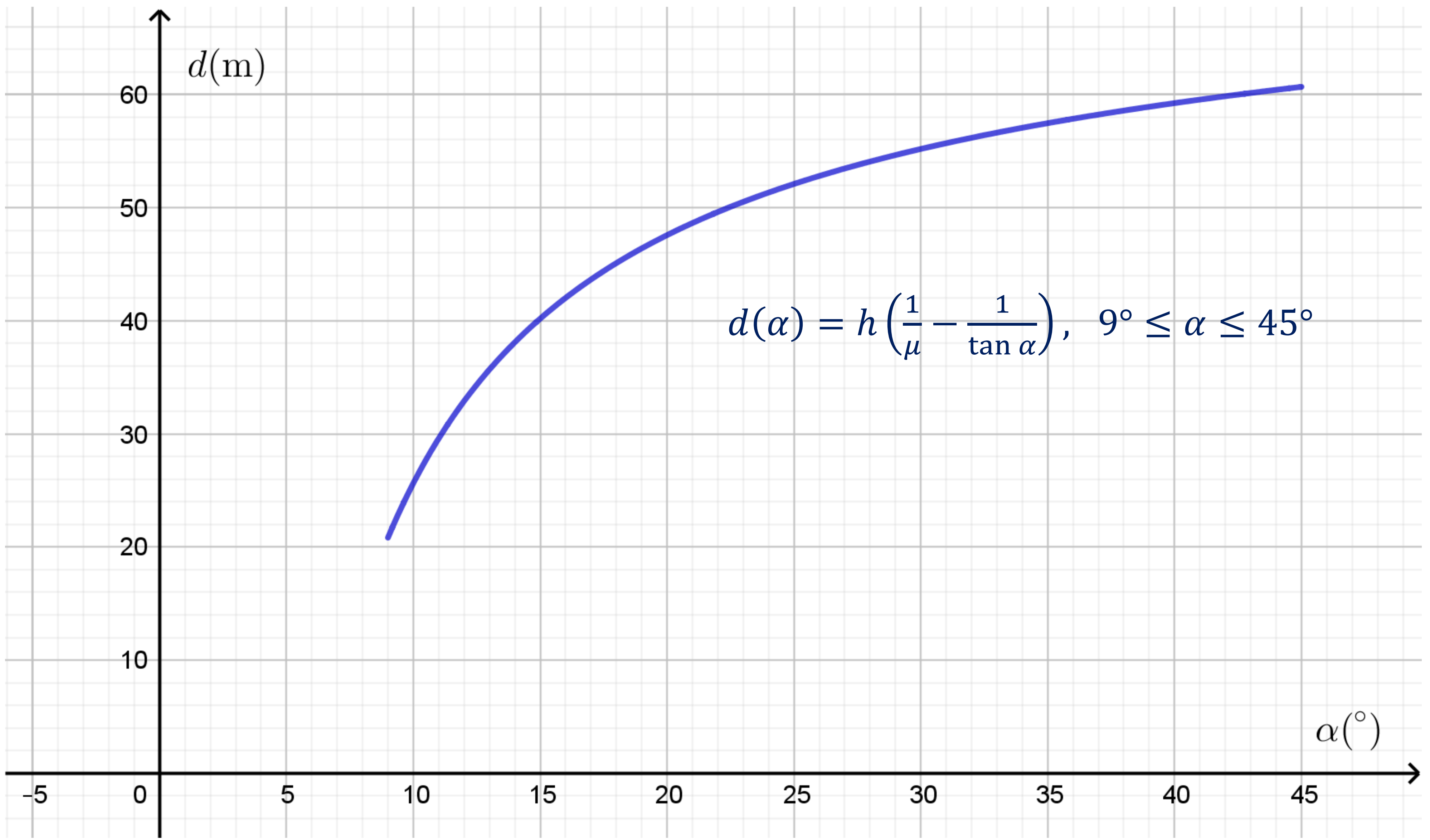
Hiihtäjä liukuu niin pitkän matkan d, kunnes liikekitkan tekemä työ $W = F_\mu d$ on liike-energian E_{k2} suuruinen. (Tällöin liike-energiaa on nolla, koska se on muuttunut kitkan kautta lämmöksi.)

Kohdan 4.1 perusteella $v = \sqrt{2gh(1 - \mu \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})}$, joten $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2 = mgh\left(1 - \mu \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$.

Saadaan yhtälö $\mu mgd = mgh\left(1 - \mu \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$d = \frac{h}{\mu}\left(1 - \mu \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = h\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\tan\alpha}\right)$$

Liukumismatka on siis funktion $d(\alpha) = h(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\tan\alpha})$ kuvaaja välillä 9° ... $45°$.



$d(\mathrm{m})$
60
50
40
30
20
10
$\alpha(^\circ)$
–5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
$d(\alpha) = h\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\tan\alpha}\right), \quad 9^\circ \le \alpha \le 45^\circ$