

S2018/10 Tähdet ja avaruus (20 p.)

Aineisto:

10.A Kuva: Kierteisgalaksi NGC 3198

10.B Kuvaaja: Kierteisgalaksissa NGC 3198 kiertävien tähtien nopeus galaksin keskustasta mitatun etäisyyden r funktiona

10.C Teksti: Kierteisgalaksin massajakauma ja galaksissa kiertävät tähdet

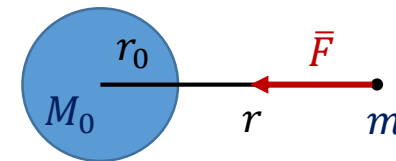
10.1. Tehdään ensin oletus, että galaksin massa koostuu vain kirkkaana näkyvän osan säteen r_0 sisäpuolelle jäävästä massasta M_0 , jolloin $M(r) = M_0$, kun $r > r_0$. Johda laki, joka tällä oletuksella kuvaa tähden nopeuden riippuvuutta etäisyydestä r , kun tähti kiertää galaksin keskustaa kirkkaana näkyvän osan ulkopuolella. (6 p.)

Newtonin gravitaatiolain perusteella galaksia sen kirkkaana näkyvän osan ulkopuolella kiertävään tähteen (massa = m) vaikuttaa gravitaatiovoima

$$F = \gamma \frac{M_0 m}{r^2}$$

Kun tähtien radat mallinnetaan ympyräradoiksi, ratanopeus v on (tietyllä etäisyydellä r) vakio ja tähden vaikuttavan normaalivoiman suuruus Newtonin II lain perusteella

$$F = ma_n = \frac{mv^2}{r}.$$



Gravitaatiovoima toimii normaalivoimana, joten saadaan yhtälö

$$\gamma \frac{M_0 m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$
$$v^2 = \gamma \frac{M_0}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{M_0}{r}} = \sqrt{\gamma M_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}$$

Tähden nopeus v on siis oletuksen mukaisessa tilanteessa kääntäen verrannollinen etäisyyden r neliöjuureen:

$$v \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$$

10.2. Kuvaajan 10.B esittämien mittaustulosten perusteella tähden nopeus on etäisyydestä riippumatta likimain vakio, kun tähti liikkuu ympyräradalla galaksin kirkkaana näkyvän osan ulkopuolella. Johda laki, joka mittaustulosten mukaisen tilanteen vallitessa kuvaa tähden radan sisäpuolelle jäävän galaksin massan $M(r)$ riippuvuutta radan säteestä r , kun $r > r_0$. (4 p.)

Vastaavasti kuten edellisessä kohdassa saadaan nyt aineiston kaavan perusteella yhtälö

$$\gamma \frac{M(r) \cdot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

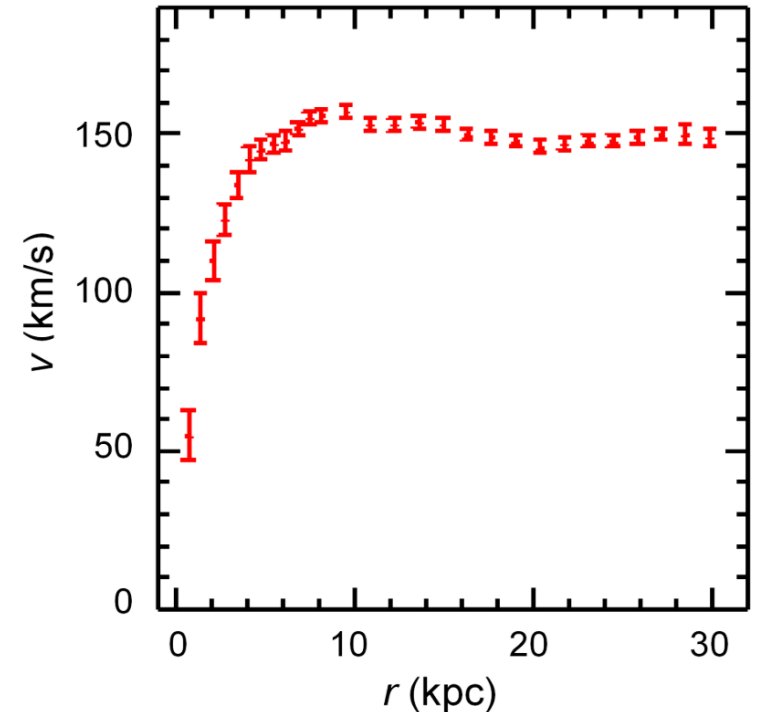
josta edelleen

$$M(r) = \frac{v^2}{\gamma} r.$$

Tässä $v \approx 150 \frac{km}{s}$ on likimain vakio mittaustulosten perusteella.

Erityisesti kirkkaana näkyvän osan rajalla laki saa muodon

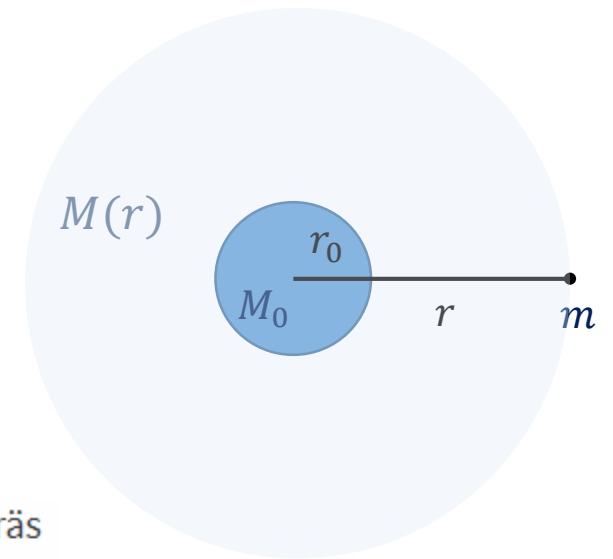
$$M_0 = \frac{v^2}{\gamma} r_0.$$



Toisaalta massan riippuvuus säteestä voidaan esittää myös muodossa

$$M(r) = \frac{M_0}{r_0} r, \quad (M(r) \sim r)$$

koska $\frac{v^2}{\gamma} = \frac{M_0}{r_0}$.



10.3. Mittaustulosten mukaan tähtien nopeus on vakio ainakin 30 kiloparsekin etäisyydelle asti. Tämä on eräs todiste pimeän aineen olemassaolosta. Selitä miksi. Laske myös, kuinka suuri galaksin kokonaismassa vähintään on mittaustulosten perusteella. Kuinka suuri on kirkkaana näkyvän osan osuus tästä kokonaismassasta? (10 p.)

Jos galaksin massa olisi lähes kokonaan kirkkaassa osassa, niin kirkkaan osan ulkopuolisten tähtien kiertonopeuden pitäisi kohdan 10.1 perusteella olla kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöjuureen. Tämä ei mittaustulosten perusteella pidä paikkaansa.

Galaksin kokonaismassalle M_{kok} saadaan arvio (alaraja) laskemalla 30 kiloparsekin etäisyydellä kiertävän tähden radan sisälle jäävä massa. Aiemman perusteella tämä saadaan kaavasta

$$M(r) = \frac{v^2}{\gamma} r.$$

Sijoitetaan mittaustulokset $r = 30 \text{ kpc}$ ja $v = 150 \frac{\text{km}}{\text{s}}$:

$$\frac{\left(\frac{150000 \cdot \text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\text{Gc}} \cdot 30000 \cdot \text{pc}$$

$$3.120778669 \times 10^{41} \cdot \text{kg}$$

Kokonaismassa on $M_{\text{kok}} \approx 3,1 \cdot 10^{41} \text{ kg}$.

Galaksin kirkas osa ulottuu etäisyydelle $r_0 \approx 6 \text{ kpc}$, mutta kokonaismassan laskussa käytettiin etäisyyden arvoa $r = 30 \text{ kpc}$.

Sijoittamalla etäisyydet kaavaan $M(r) = M_{\text{kok}} = \frac{M_0}{r_0} r$ saadaan $M_{\text{kok}} = \frac{M_0}{6 \text{ kpc}} \cdot 30 \text{ kpc} = 5M_0$.

Siis galaksin kokonaismassa on viisinkertainen kirkkaan osan massaan nähden eli kirkkaan osan massa on 20 % kokonaismassasta. ($M_0 = \frac{M_{\text{kok}}}{5} = 0,2M_0$.)

Kirkkaan osan ulkopuolinen massa ei voi johtua kirkkaan osan ulkopuolisista tähdistä, koska niitä on niin harvassa. (80 % galaksin tähdistä ei selvästikään voi olla kirkkaan osan ulkopuolella.) Tämän vuoksi galaksiin täytyy kuulua myös tuntematonta pimeää ainetta.