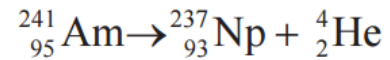


S2011/9

Palovaroittimessa on α -aktiivista ^{241}Am -isotooppia, jonka hajoamisreaktio on



- a) Palovaroittimen ^{241}Am -aktiivisuus on 38 kBq. Kuinka monta grammaa ^{241}Am -isotooppia varoittimessa on?
b) Varoitin lakkaa toimimasta, jos sen aktiivisuus laskee alle 25 kBq:n. Kuinka pitkä aika tähän kuluu?

- a) Aktiivisuus $A = 38$ kBq. Taulukkokirjan mukaan atomimassa on $m_{\text{Am}} = 241,05683$ u ja puoliintumisaika on $T_{1/2} = 432,2$ a.

Ratkaistaan massa aktiivisuuden kaavan $A = \lambda N$ avulla. Tässä hajoamisvakio $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.

Hiukkasten määrä N saadaan jakamalla näytteen massa m atomin massalla m_{Am} :

$$N = \frac{m}{m_{\text{Am}}}$$

Hiukkasten määrälle saa lausekkeen myös ainemäärän $n = \frac{m}{M}$ ja Avogadron luvun N_A avulla tulkitsemalla atomimassan moolimassaksi M :

$$N = nN_A = \frac{m}{M}N_A$$

$$\text{Siis } A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{m_{Am}},$$

josta saadaan ratkaistua massa:

$$m = A \frac{m_{Am} T_{1/2}}{\ln 2} \approx 2,993 \cdot 10^{-7} \text{ g} \approx 0,30 \text{ } \mu\text{g}$$

Vastaus:

Palovaroitinmassa on n. 0,30 μg ^{241}Am -isotooppia.

TI-Nspire:

$$m_{Am} := 241.05683 \cdot \text{u} \quad 4.00284283486 \text{E-}25 \cdot \text{kg}$$

$$t_{p} := 432.2 \cdot \text{yr} \quad 13638903406.3 \cdot \text{s}$$

$$a := 38000 \cdot \text{Hz} \quad 38000 \cdot \text{Hz}$$

$$a \cdot \frac{m_{Am} \cdot t_{p}}{\ln(2)} \quad 2.99299594031 \text{E-}10 \cdot \text{kg}$$

$$2.9929959403098 \text{E-}10 \cdot \text{kg} \rightarrow \text{gm} \quad 2.99299594031 \text{E-}7 \cdot \text{gm}$$

Tai solve-toiminnolla:

$$\lambda := \frac{\ln(2)}{t_{p}} \quad 5.08213277793 \text{E-}11 \cdot \text{Hz}$$

$$n := \frac{m}{m_{Am}} \quad 2.49822449008 \text{E}24 \cdot m \cdot \frac{1}{\text{kg}}$$

$$\text{solve}(a = \lambda \cdot n, m) \quad m = 2.99299594031 \text{E-}10 \cdot \text{kg}$$

b) Merkitään nyt alkuperäinen aktiivisuus $A_0 = 38 \text{ kBq}$.

Aktiivisuus A vähenee eksponentiaalisesti hajoamislain $A = A_0 e^{-\lambda t}$ mukaisesti. Ratkaistaan laskinohjelmalla yhtälöstä t , kun $A = 25 \text{ kBq}$ ja $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$.

```
a0:=38000·_Hz 38000·_Hz
```

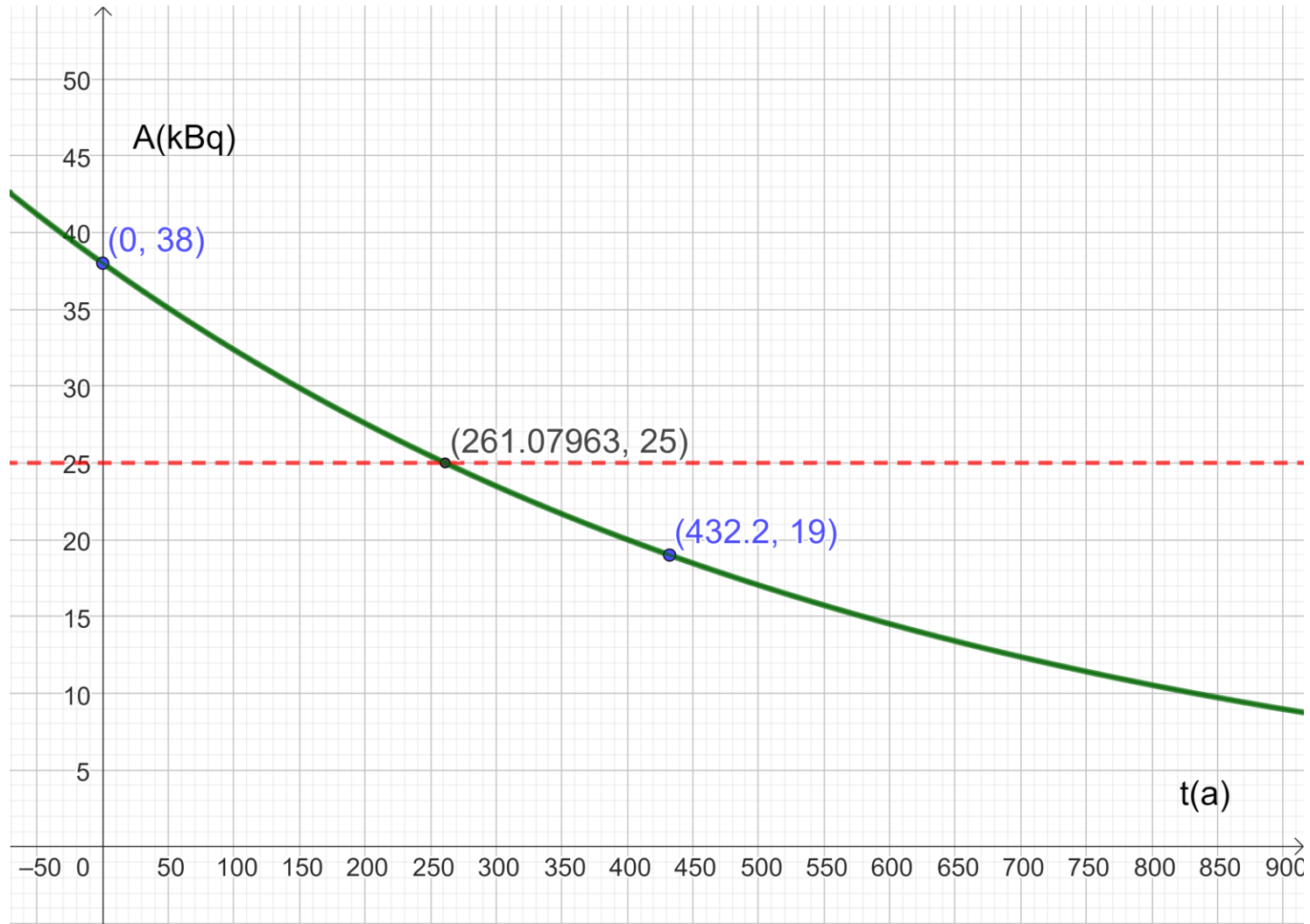
```
a:=25000·_Hz 25000·_Hz
```

```
solve(a=a0·e-λ·t,t) t=8238870434.01·_s
```

```
8238870434.01·_s►_yr 261.07962609·_yr
```

Vastaus: Aktiivisuus laskee n. 260 vuodessa arvoon 25 kBq.

Eksponttifunktion mallinnus GeoGebralla:



$$f(x) = \text{SovitaEksp}(\{A, B\}) \\ = 38 e^{-0.0016x}$$

$$g(x) = \text{SovitaKasvu}(\{A, B\}) \\ = 38 \cdot 0.9984^x$$

Tästä versiosta näkee prosenttikertoimen, jolla aktiivisuus pienenee vuosittain (vähenee 0,16 % vuodessa).

Toinen piste (432,2; 19) voidaan päätellä puoliintumisajan avulla: Puoliintumisajan kuluttua aktiivisuus on puolet alkuperäisestä.

c) Lasketaan reaktioenergia alfahajoamisessa ${}^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow {}^{237}_{93}\text{Np} + {}^4_2\text{He}$.

$$Q = [m_{Am} - 95m_e - (m_{Np} - 93m_e + m_{He} - 2m_e)] \cdot c^2$$

$$Q = [m_{Am} - m_{Np} - m_{He}] \cdot c^2$$

$$Q = [241,05682 \text{ u} - 237,048167 \text{ u} - 4,0026033 \text{ u}] \cdot c^2 \approx 5,6353 \text{ MeV}$$

$$q := (241.05682 \cdot \text{u} - 237.048167 \cdot \text{u} - 4.0026033 \cdot \text{u}) \cdot \text{c}^2 \quad 9.02868168949\text{E-13} \cdot \text{J}$$

$$9.0286816894888\text{E-13} \cdot \text{J} \blacktriangleright \text{eV}$$

$$5635259.86954 \cdot \text{eV}$$

Muista, että tässä lasketaan *ytimen* massavajetta, joten vähennä atomin massoista elektronien massat! Laskussa kannattaa käyttää helium-atomin massaa alfahiukkasen massan sijaan, jolloin elektronien massat supistuvat pois.

Oletetaan, että (likimain) kaikki reaktiossa vapautuva energia muuttuu hiukkasten liike-energiaksi.

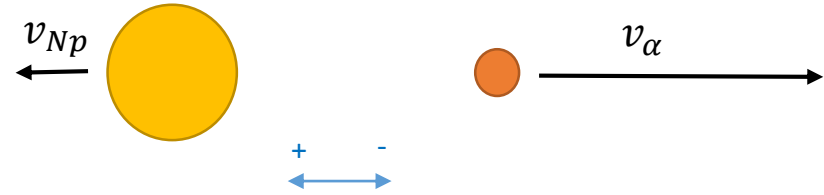
Näin saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2} m_{Np} v_{Np}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = Q$$

Tässä pitää käyttää alfahiukkasen massaa m_{α} . Myös m_{Np} tarkoittaa nyt neptunium-ytimen massaa.

Oletetaan lisäksi, että Amerikium-ydin on kutakuinkin levossa ennen hajoamistaan. Tällöin liikemäärän säilymisen perusteella:

$$m_{Np} v_{Np} - m_{\alpha} v_{\alpha} = 0$$



Ratkaistaan yhtälöpari ensin ”tyylikkäämmin” eli ilman laskinohjelmaa ja mahdollisimman vähillä sijoituksilla. Samalla alfahiukkasen energialle saadaan muodostettua yksinkertainen laskukaava.

Liikemäärän yhtälöstä saadaan $v_{Np} = \frac{m_{\alpha}}{m_{Np}} v_{\alpha}$. Sijoitetaan tämä energiayhtälöön.

$$\frac{1}{2} m_{Np} \left(\frac{m_{\alpha}}{m_{Np}} v_{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = Q$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m_{Np}} \frac{m_{\alpha}^2}{\cancel{m_{Np}}} v_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = Q$$

$$\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \frac{m_{\alpha}}{m_{Np}} + \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = Q$$

$$\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \left(\frac{m_{\alpha}}{m_{Np}} + 1 \right) = Q$$

$$\frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = E_{k\alpha} = \frac{Q}{\frac{m_{\alpha}}{m_{Np}} + 1} = \frac{5,6353 \text{ MeV}}{\frac{4,0015062 \cancel{\mu}}{237,048167 \cancel{\mu} - 93 \cdot 5,485799 \cdot 10^{-4} \cancel{\mu}} + 1}$$

$$E_{k\alpha} \approx 5,5417 \text{ MeV} \approx 5,5 \text{ MeV}$$

Neptunium-atomin massasta pitää vähentää elektronien massat. Tämä ei tosin vaikuta juurikaan lopputulokseen.

Alfahiukkasen liike-energia on 5,5 MeV (n. 98 % reaktioenergiasta menee alfahiukkaselle).

TI-Nspire:

$$q := (241.05682 \cdot \text{u}^{-237.048167} \cdot \text{u}^{-4.0026033} \cdot \text{u}) \cdot \text{c}^2 \quad 9.02868168949 \mathbf{E}^{-13} \cdot \text{J}$$

$$9.0286816894888 \mathbf{E}^{-13} \cdot \text{J} \blacktriangleright \text{eV} \quad 5635259.86954 \cdot \text{eV}$$

$$m1 := 237.048167 \cdot \text{u}^{-93} \cdot \text{Me} \quad 3.93543024701 \mathbf{E}^{-25} \cdot \text{kg}$$

$$m2 := 4.0015062 \cdot \text{u} \quad 6.64465737034 \mathbf{E}^{-27} \cdot \text{kg}$$

$$\text{solve} \left(\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1^2 + \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2^2 = q \\ m1 \cdot v1 - m2 \cdot v2 = 0 \end{array} \right. \right) \left. \left\{ v1, v2 \right\} \right| v2 > 0$$

$$v1 = 276016.787345 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ and } v2 = 16347642.2193 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v2 := 16347642.2193 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 16347642.2193 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2^2 \blacktriangleright \text{eV} \quad 5541692.84413 \cdot \text{eV}$$