Tasaisesti kiihtyvä liike

- Tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kappaleen nopeus muuttuu samassa ajassa aina yhtä paljon eli keskikiihtyvyys a_k on millä tahansa aikavälillä vakio $(= a)$
- (t, v)–koordinaatistossa liikkeen kuvaaja on suora $v = v_0 + at$
- Kiihtyvyys a saadaan fysikaalisena kulmakertoimena
- kuljettua matkaa s kuvaa pinta-ala (t, v) – koordinaatistossa

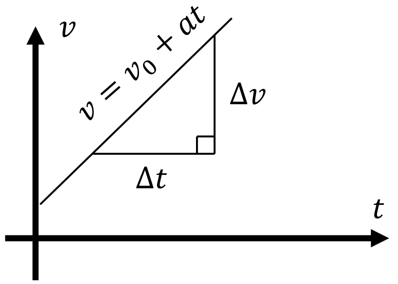
$$\boxed{s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

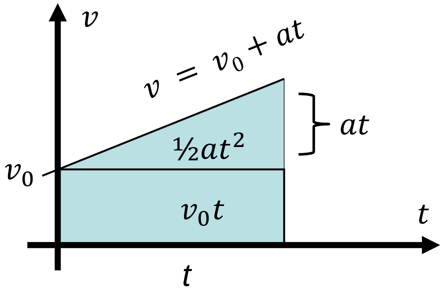
  - v_0 = lähtönopeus
  - a = kiihtyvyys (vakio)
  - t = kulunut aika

$$\text{keskikiiht yvyys} = \frac{\text{nopeuden muutos}}{\text{ajan muutos}}$$

$$a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

$$\boxed{v = v_0 + at} \quad (t_0 = 0,\ a_k = a)$$





Keskinopeus *tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä* on alku- ja loppunopeuden keskiarvo:

$$v_k = \frac{v_0 + v}{2}$$

Kuljettu matka keskinopeuden avulla:

$$s = v_k t$$

Esimerkki: *Levosta lähtevä auto saavuttaa 10,4 sekunnissa loppunopeuden 125,0 km/h. Laske auton keskikiihtyvyys ja kiihdyttämiseen tarvittava matka.*

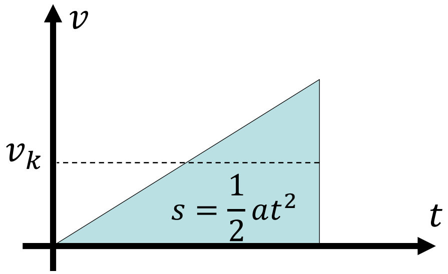
Keskikiihtyvyys: $a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{125{,}0\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{10{,}4\ \mathrm{s}} = \frac{\frac{125}{3{,}6}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10{,}4\ \mathrm{s}} \approx 3{,}3387\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 3{,}34\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Oletetaan, että kiihtyvyys on tasaista (kiihdyttämiseen tarvittavaa matkaa ei voi muuten ratkaista).

Kun alkunopeus $v_0 = 0$, niin matka saadaan kaavasta

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$s \approx \frac{1}{2} \cdot 3{,}3387\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (10{,}4\ \mathrm{s})^2 \approx 181\ \mathrm{m}$$



Toinen tapa keskinopeuden avulla (ks. kuvio):

$$v_k = \frac{125\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{2} = 62{,}5\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 17{,}361\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

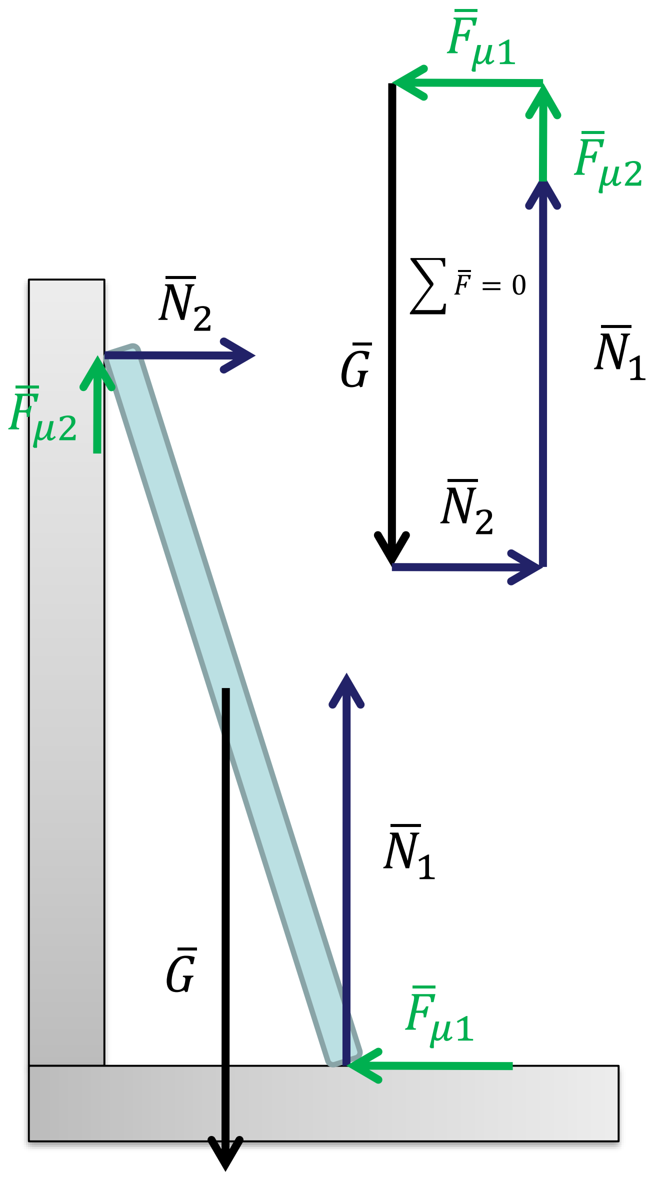
$$s = v_k t = 17{,}361\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10{,}4\ \mathrm{s} \approx 181\ \mathrm{m}$$

Voimakuvion piirtäminen

Esimerkki: Piirrä seinään nojaavien tikkaiden voimakuvio.

1. Piirretään mallikuva tilanteesta (esim. Ti-Nspire:n Fysiikan piirto -lisäosan tai LibreOffice Draw:n avulla)
2. Piirretään kaikki *tikkaisiin* vaikuttavat voimat (ei muihin kappaleisiin vaikuttavia voimia!)
   - Painovoima $\bar{G}$ (oletetaan tikkaat tasapaksuiksi, jolloin painopiste on keskellä)
   - Tukivoimat $\bar{N}_1$ ja $\bar{N}_2$ *kohtisuorasti* kosketuspintaan nähden
   - Kitkavoimat $\bar{F}_{\mu 1}$ ja $\bar{F}_{\mu 2}$

- Pyri piirtämään voimat oikeassa suhteessa
- Muista myös nimetä voimat (ei pelkkä kirjaintunnus)
- Jos kappale on paikallaan tai liikkuu tasaisella nopeudella ($\bar{a} = 0$) niin voimien vektorisumma $\sum \bar{F} = m\bar{a} = 0$.



Kitka

- Kitka on kappaleiden välinen kosketusvoima joka aiheutuu mikroskooppisella tasolla tapahtuvista (sähköisistä) vuorovaikutuksista
- Liukukitka on kappaleen liukumista estävä voima
- Lepokitka on muuttuva voima, joka pitää kappaletta paikallaan
- Lähtökitka (täysin kehittynyt lepokitka) on lepokitkan suurin arvo
- Liukukitka F_μ on suoraan verrannollinen pinnan tukivoimaan *N*:

$$F_\mu = \mu N$$

  - Verrannollisuuskerroin μ on *liukukitkakerroin*.
- Lähtökitka $F_{\mu 0}$ on suoraan verrannollinen pinnan tukivoimaan *N*:

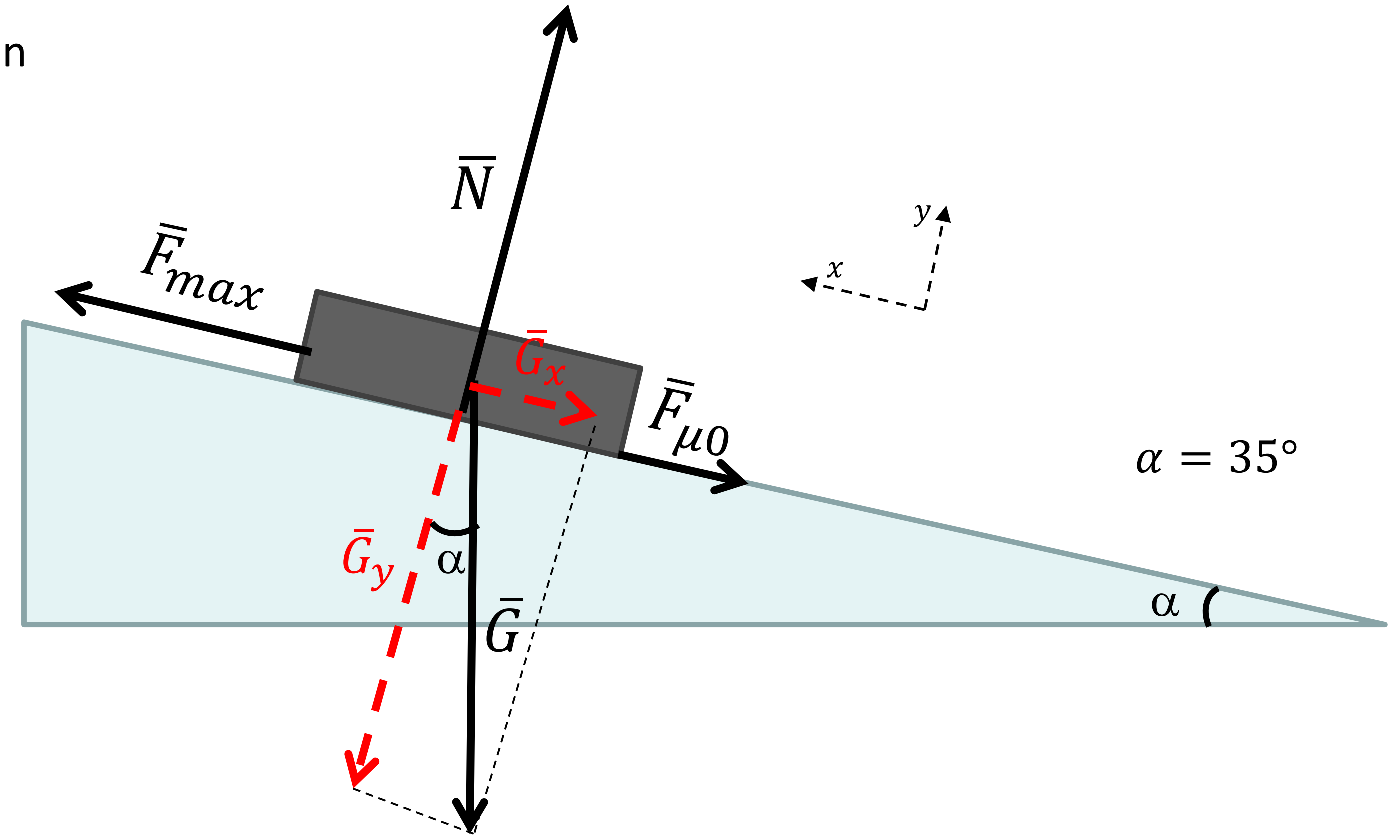
$$F_{\mu 0} = \mu_0 N$$

  - Verrannollisuuskerroin μ_0 on *lähtökitkakerroin*.
- Kitkakertoimet ovat yksiköttömiä, pintaparille ominaisia suureita (kuvaavat ”pidon määrää”)

K2013/5 Koneen osia sisältävä laatikko, jonka massa on 425 kg, on kaltevalla lastaussillalla. Lastaussillan kaltevuuskulma vaakatasoon nähden on 35°, ja laatikon ja sillan välinen lepokitkakerroin on 0,52. Laatikko pidetään paikallaan lastaussillan suuntaisella voimalla. Kuinka suuri on voiman pienin ja suurin mahdollinen arvo?

Laatikko on levossa, joten Newtonin II lain mukaan siihen kohdistuvien voimien summa on nolla: $\sum \bar{F} = 0$.

Piirretään ensin kuvio tilanteessa, jossa voima on suurin mahdollinen, eli laatikko on juuri lähdössä liukumaan lastaussiltaa ylös.



$\bar{G}$ = laatikon paino

$\bar{N}$ = pinnan tukivoima

$\bar{F}_{max}$ = laatikkoon kohdistettava (vetävä) voima

$\bar{F}_{\mu 0}$ = täysin kehittynyt lepokitka

Jaetaan paino tason suuntaisiin ja tasoa vastaan kohtisuoriin komponentteihin.

$G_x = G \sin\alpha = mg \sin\alpha$

$G_y = G \cos\alpha = mg \cos\alpha$

Tasapainoehto x −suunnassa:

$$\bar{F}_{max} + \bar{G}_x + \bar{F}_{\mu 0} = 0$$

Skalaarimuodossa:

$$F_{max} - G_x - F_{\mu 0} = 0$$

$$F_{max} = G_x + F_{\mu 0} = mg\sin\alpha + \mu_0 N$$

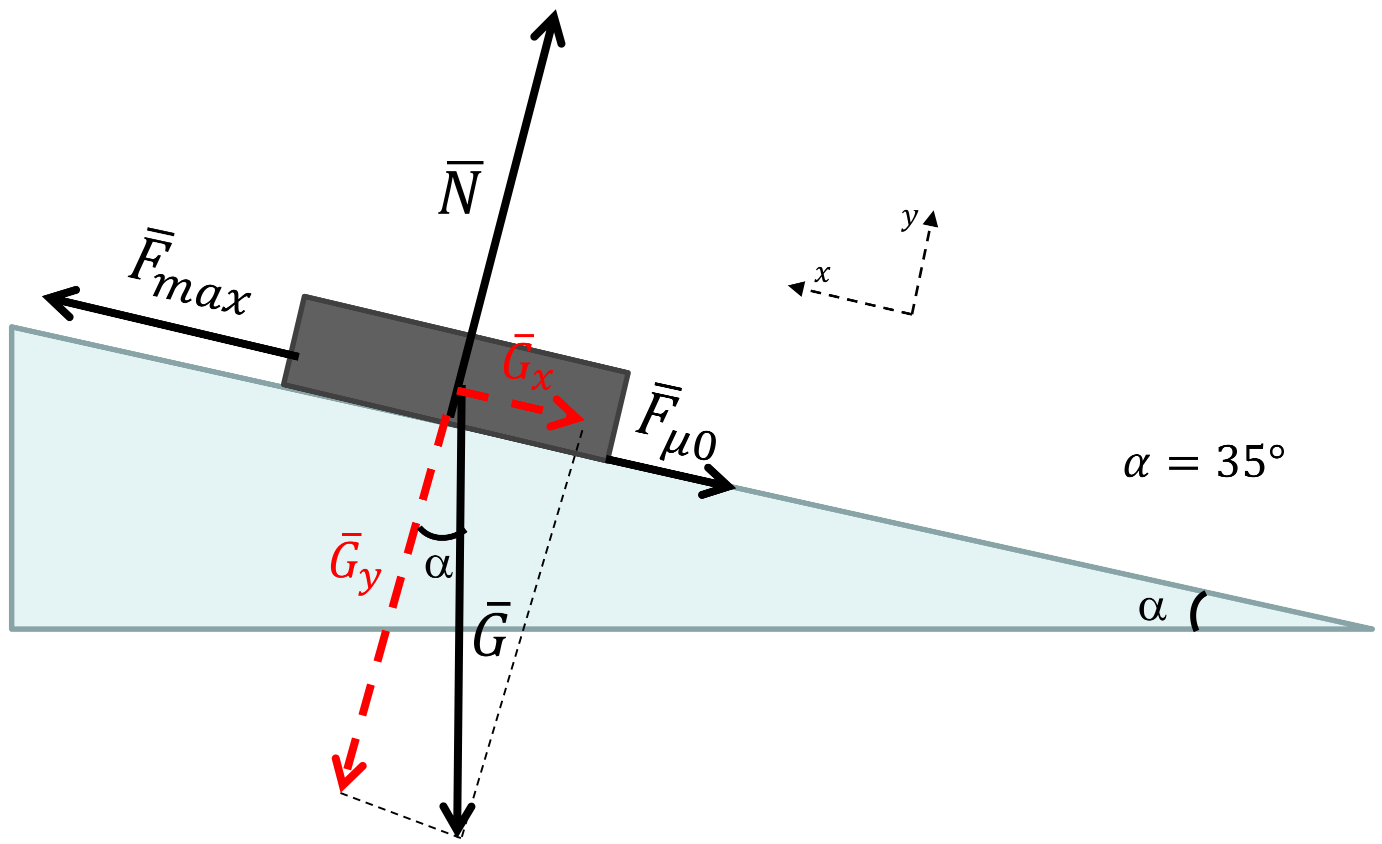
Tasapainoehto y −suunnassa:

$$\bar{G}_y + \bar{N} = 0$$

Skalaarimuodossa:

$$-G_y + N = 0$$

$$N = G_y = mg\cos\alpha$$



Voiman suurin arvo:

$$F_{max} = mg\sin\alpha + \mu_0 mg\cos\alpha$$

$$F_{max} = mg(\sin\alpha + \mu_0\cos\alpha) = 425\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (\sin 35° + 0{,}52\cos 35°) \approx 4167{,}3\ \text{N} \approx 4\,200\ \text{N}$$

Voiman suurin arvo on 4 200 N.

Lasketaan vielä voiman pienin arvo

Selvitetään ensin riittääkö lepokitka pitämään laatikon paikallaan.

Täysin kehittynyt lepokitka eli lepokitkan suurin arvo:

$$F_{\mu 0} = \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\alpha$$

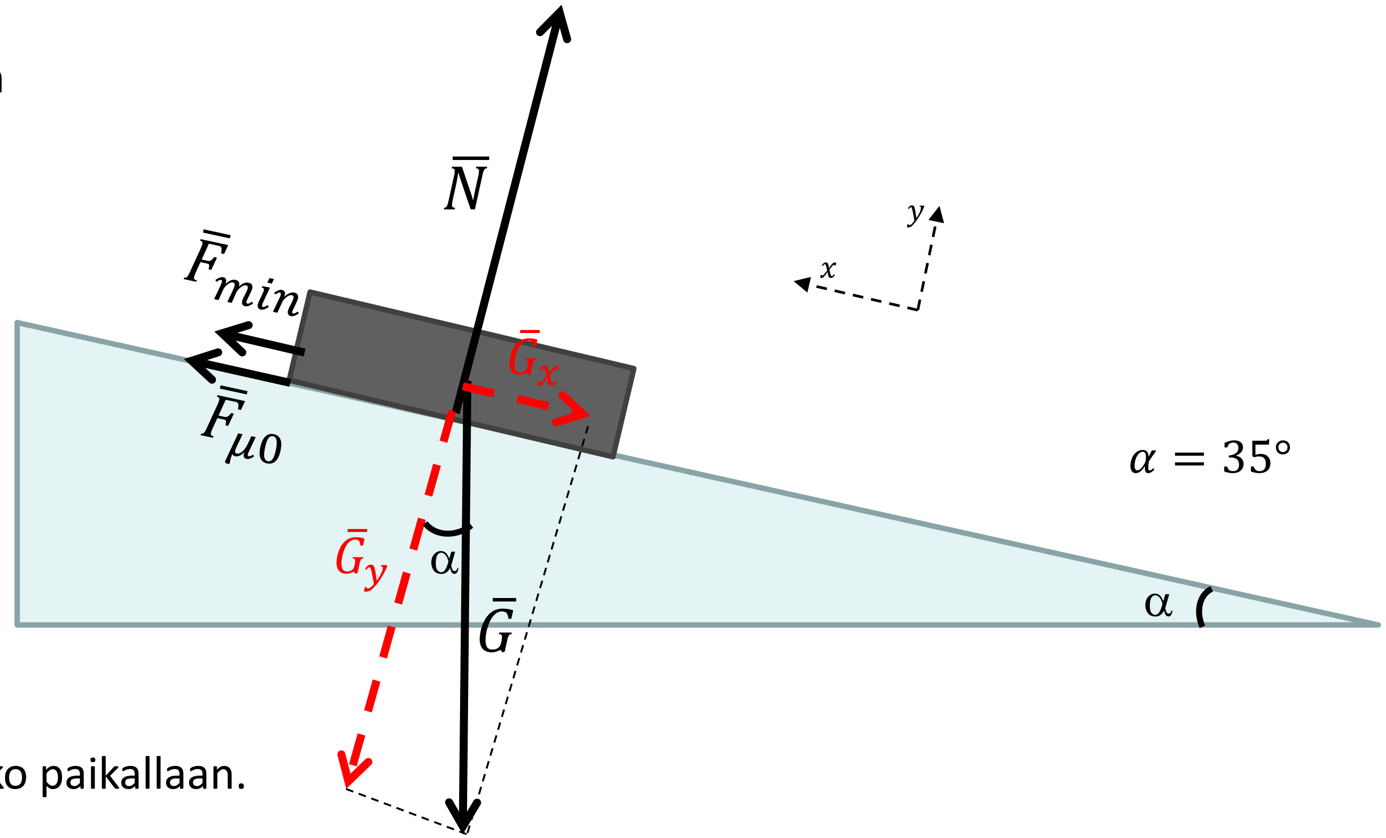
$$F_{\mu 0} = 0{,}52 \cdot 425\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \cos 35° \approx 1775{,}93\ \mathrm{N}$$

Painon tason suuntainen komponentti:

$$G_x = mg\sin\alpha$$

$$G_x = 425\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin 35° \approx 2391{,}38\ \mathrm{N}$$

Koska $G_x > F_\mu$, tarvitaan voima F_{min} pitämään laatikko paikallaan.



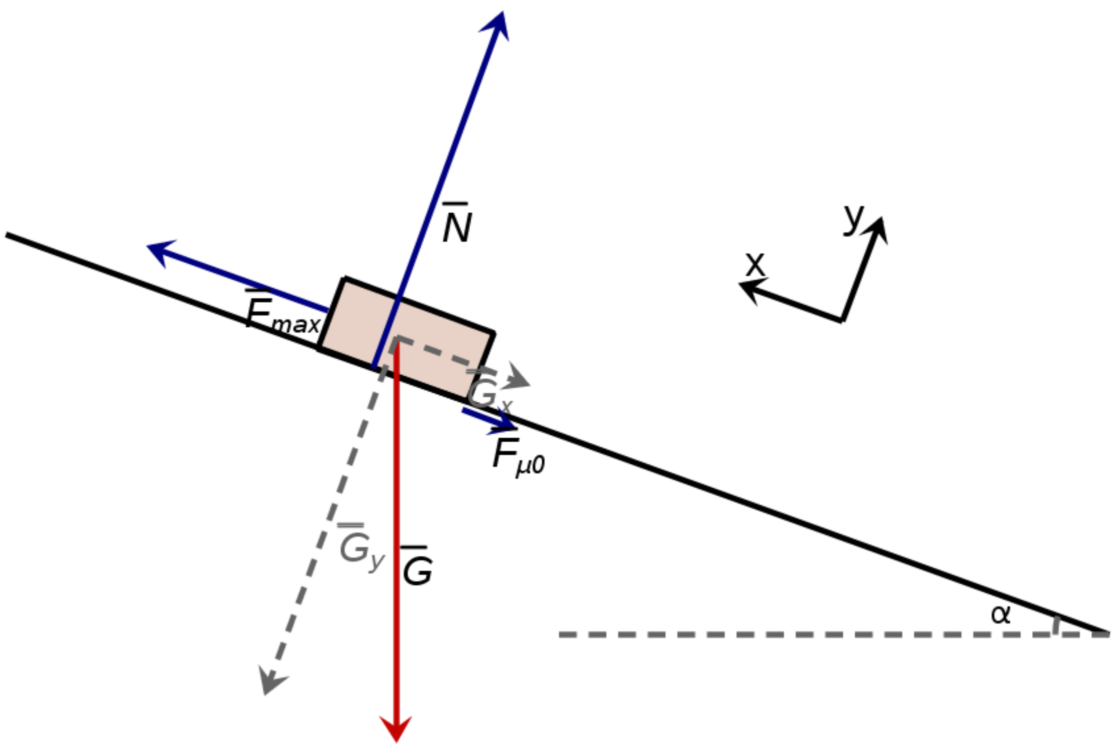
Tasapainoehto x −suunnassa voidaan nyt kirjoittaa muotoon

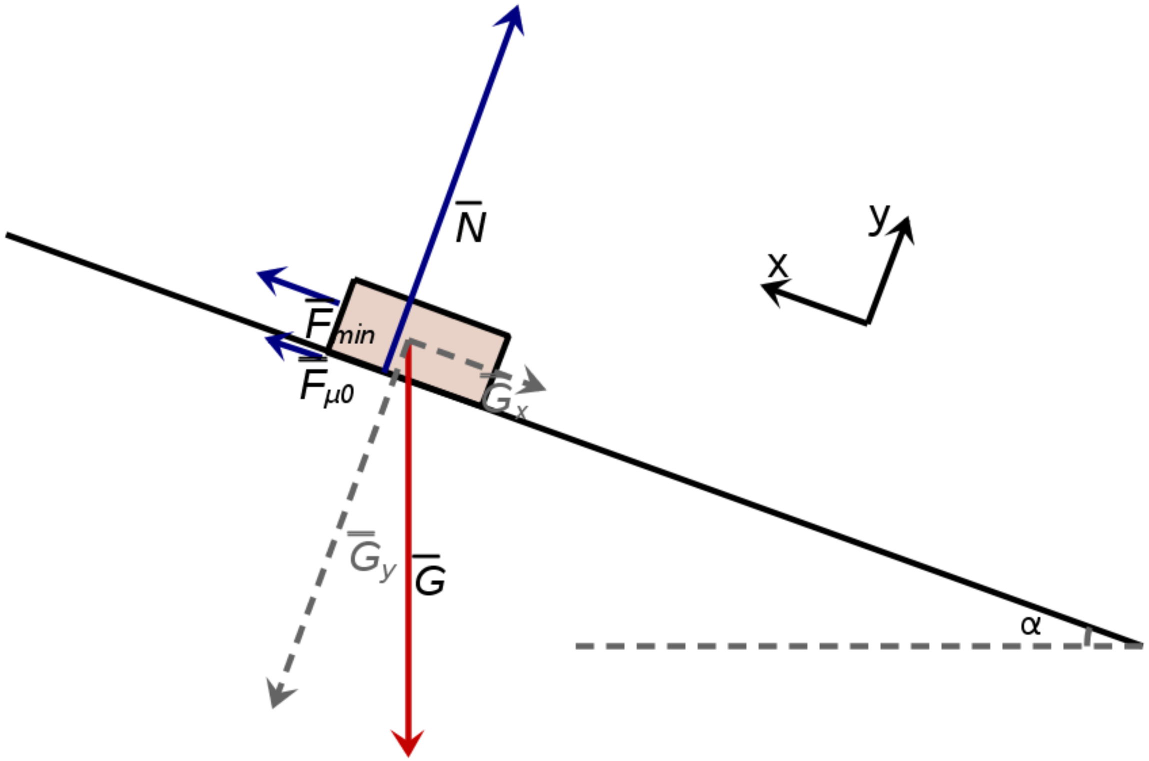
$$F_{min} + F_{\mu 0} - G_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_{min} = G_x - F_{\mu 0}$$

Voiman pienin arvo on siis

$$F_{min} = 2391{,}38\ \mathrm{N} - 1775{,}93\ \mathrm{N} \approx 615{,}45\ \mathrm{N} \approx 620\ \mathrm{N}$$

Erityisesti komponentteihin jakoa vaativat voimakuviot kannattaa tehdä Ti-Nspiren ”Fysiikan piirto” –lisäosalla:





Mekaaninen energia

- Potentiaalienergia $E_p = mgh$
  - $m =$ kappaleen massa, $h =$ korkeus valittuun nollatasoon nähden
- Liike-energia $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
  - $v =$ kappaleen nopeus
- Voima on *konservatiivinen*, jos sen tekemä työ kahden pisteen välillä riippuu vain alku- ja loppupisteistä, ei kuljetusta reitistä.
  - ts. suljetulla kierroksella tehty työ on nolla
- Konservatiivisia voimia:
  - Painovoima
  - Jousivoima
  - Sähkökentän voima
- Mekaaninen energia säilyy, kun kappaleeseen vaikuttavat voimat ovat konservatiivisia: $E_k + E_p = vakio$

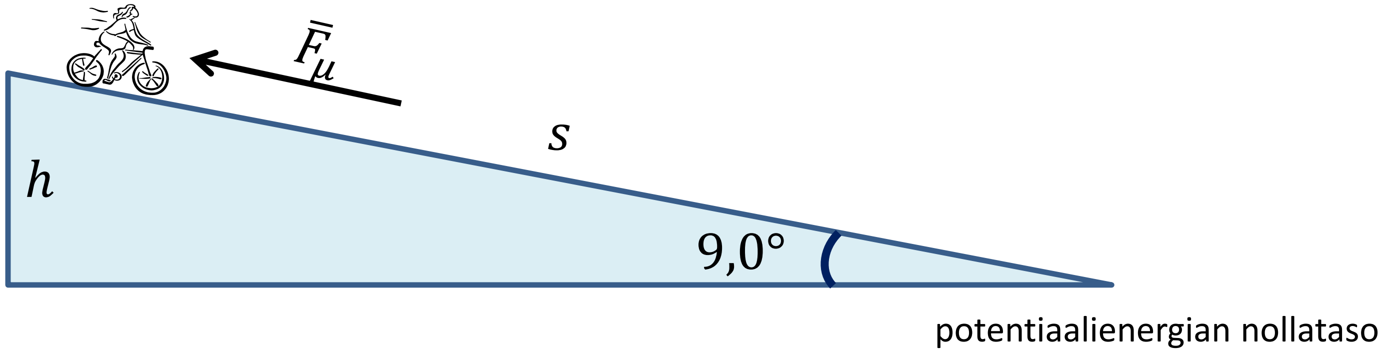
Mekaniikan energiaperiaate

$$\boxed{E_{k1} + E_{p1} + W = E_{k2} + E_{p2}}$$

- E_{k1} = liike-energia alussa
- E_{p1} = potentiaalienergia alussa
- W = ulkoisten voimien tekemä työ ($W = Fs$)
  - $W > 0$, kun voima on liikkeen suuntainen
  - $W < 0$, kun voima on liikettä vastaan (kitka)
- E_{k2} = liike-energia lopussa
- E_{p2} = potentiaalienergia lopussa

Esimerkki:

Polkupyöräilijä laskee mäkeä, jonka kaltevuuskulma on $9{,}0°$. *Mäen päällä pyöräilijän vauhti on* $4{,}5\ \mathrm{m/s}$. *Vastusvoimat ovat keskimäärin* $62\ \mathrm{N}$, *ja pyöräilijän ja pyörän kokonaismassa on* $72\ \mathrm{kg}$. *Kuinka suuri vauhti pyöräilijällä on, kun hän on laskenut mäkeä* $120\ \mathrm{m}$ *polkematta?*



$s = 120\ \mathrm{m}$

$h = s \cdot \sin 9{,}0°$

$m = 72\ \mathrm{kg}$

$F_\mu = 62\ N$

$v_1 = 4{,}5\ \mathrm{m/s}$

$v_2 = ?$

Hyödynnetään mekaniikan energiaperiaatetta

$$E_{k1} + E_{p1} + W = E_{k2} + E_{p2}$$

Tässä $W = -Fs$ on ulkoisten voimien liikettä vastaan tekemä työ.
Valitaan potentiaalienergian nollataso $\mathrm{E}_{p2} = 0$:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh - Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Big| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ : m \end{array}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh - \frac{2Fs}{m} \quad \Big| \sqrt{}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh - \frac{2Fs}{m}} = \sqrt{v_1^2 + 2gs\sin 9{,}0^\circ - \frac{2Fs}{m}}$$

$$v_2 = \sqrt{\left(4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + 2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 120\ \mathrm{m}\cdot \sin 9{,}0^\circ - \frac{2\cdot 62\ \mathrm{N}\cdot 120\ \mathrm{m}}{72\ \mathrm{kg}}}$$

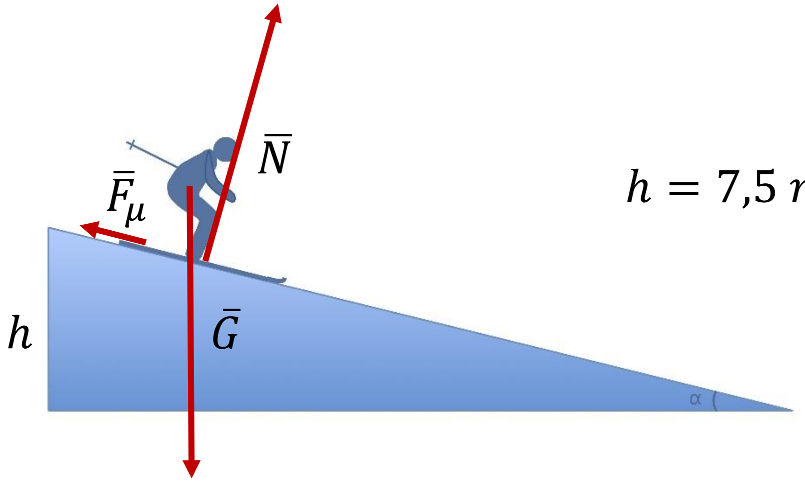
$$v_2 \approx 13{,}49\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

S2019/4 Mäenlaskua (15 p.)

Hiihtäjä lähtee laskemaan 7,5 m korkean mäen harjalta työntämättä itselleen alkuvauhtia. Mäen kulma vaakatason suhteen on α (katso kuva 4.A). Suksen ja lumen välinen liukukitkakerroin on 0,11. Ilmanvastus voidaan jättää huomioimatta.

4.1. Kuinka suuri hiihtäjän vauhti on mäen lopussa, kun α = 14°? (7 p.)

Hiihtäjään vaikuttavat voimat ovat:
Painovoima $\bar{G}$
Mäen tukivoima $\bar{N}$
Suksien ja lumen välinen liikekitka $\bar{F}_\mu$



$h = 7{,}5\ m$

Mekaniikan energiaperiaatteen mukaan mekaaninen energia (liike-energia + potentiaalienergia) muuttuu liikekitkan tekemän työn W verran:

$$E_{p1} + E_{k1} + W = E_{p2} + E_{k2}$$

Valitaan potentiaalienergian nollataso rinteen matalimpaan kohtaan, jolloin potentiaalienergia lopussa on $E_{p2} = 0$.

Koska alkuvauhtia ei ole, niin hiihtäjän liike-energia alussa on $E_{k1} = 0$.

Liikekitka tekee työn liikesuuntaa vastaan, joten $W = -F_\mu s$, missä s on rinteen pituus.

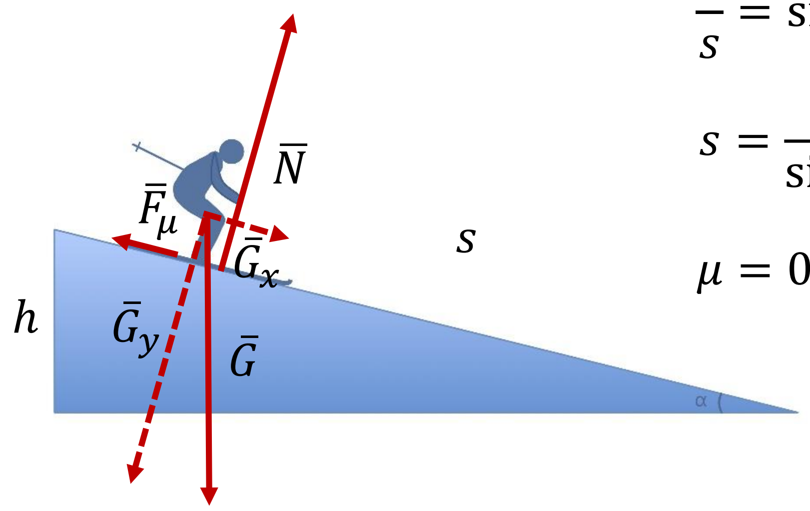
Liikekitka on verrannollinen mäen tukivoimaan $F_\mu = \mu N$.

Hiihtäjä on tasapainossa rinnettä vastaan kohtisuorassa suunnassa, joten $N = G_y = mg\cos\alpha$.

Energiaperiaate voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$E_{p1} - F_\mu s = E_{k2}.$$

$$mgh - \mu mg\cos\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}mv^2$$



$$\frac{h}{s} = \sin\alpha$$

$$s = \frac{\mathrm{h}}{\sin\alpha}$$

$$\mu = 0{,}11$$

Josta saadaan nopeudeksi: $v = \sqrt{2gh(1 - \mu\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})} \approx 9{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

(Käytä tarvittaessa solve-toimintoa)

$$\sqrt{2\cdot \_g\cdot 7.5\cdot \_m\cdot\left(1-0.11\cdot\frac{\cos(14)}{\sin(14)}\right)} \qquad 9.066499546\cdot\frac{\_m}{\_s}$$

4.2. Hiihtäjä lähtee liukumaan mäkeä alas, mikäli mäen kulma on 9° tai enemmän. Piirrä kuvaaja hiihtäjän tasamaalla liukumasta matkasta mäen kulman α funktiona välillä 9°...45°. (8 p.)

Tasamaalla hiihtäjään kohdistuvan tukivoiman suuruus on sama kuin hiihtäjän paino: $N = mg$

Häneen vaikuttaa nyt liikekitka $F_\mu = \mu mg$.

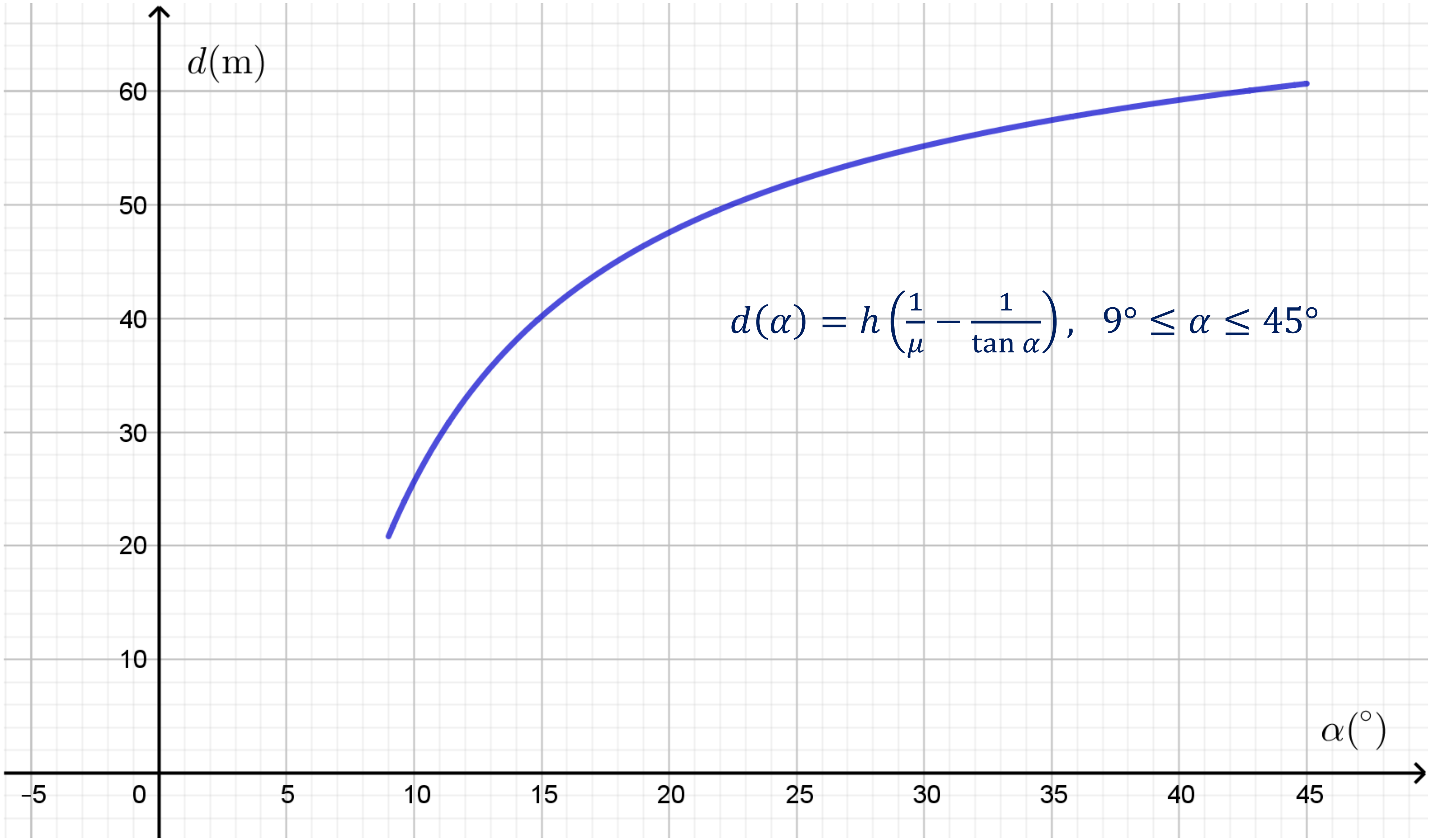
Hiihtäjä liukuu niin pitkän matkan d, kunnes liikekitkan tekemä työ $W = F_\mu d$ on liike-energian E_{k2} suuruinen. (Tällöin liike-energiaa on nolla, koska se on muuttunut kitkan kautta lämmöksi.)

Kohdan 4.1 perusteella $v = \sqrt{2gh(1-\mu\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})}$, joten $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2 = mgh\left(1-\mu\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$.

Saadaan yhtälö $\mu mgd = mgh\left(1-\mu\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$$d = \frac{h}{\mu}\left(1-\mu\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = h\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\tan\alpha}\right)$$

Liukumismatka on siis funktion $d(\alpha) = h(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\tan\alpha})$ kuvaaja välillä 9° ... 45° .



$d(\mathrm{m})$
$\alpha(^\circ)$
$d(\alpha) = h\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\tan\alpha}\right), \quad 9^\circ \le \alpha \le 45^\circ$
60
50
40
30
20
10
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45