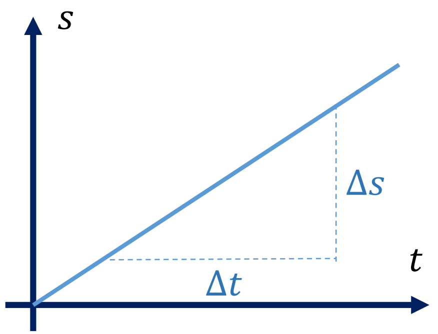
Fysikaalinen kulmakerroin

- Kuvaajasuoran fysikaalinen kulmakerroin (k) kertoo, kuinka voimakkaasti suureen arvo riippuu muuttujan arvosta.
- Jos kaksi suuretta x ja y ovat suoraan verrannollisia, niin riippuvuutta kuvaa (x, y) −koordinaatistossa origon kautta kulkeva suora $y = kx$.
- Esimerkkejä:
  - Aika t ja matka s, kun nopeus v on vakio: $s = vt$
  - Tilavuus V ja massa m, kun tiheys ρ on vakio: $m = \rho V$
  - Jännite U ja virta I, kun resistanssi R on vakio: $U = RI$
  - Aika t ja energia E, kun teho P on vakio: $E = Pt$



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

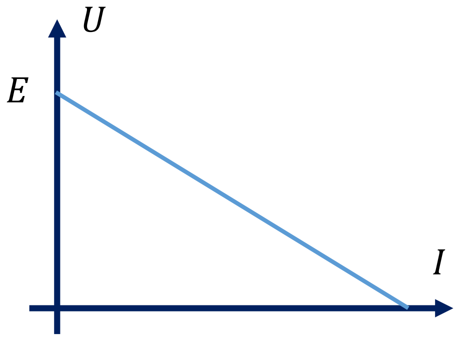
- Kaavasta voidaan päätellä mitkä suuret ovat suoraan verrannollisia:
  - Esimerkiksi liike-energia ja nopeuden neliö ovat suoraan verrannollisia ja verrannollisuuskertoimena (fysikaalisena kulmakertoimena (v^2, E_k) −koordinaatistossa) on $\frac{1}{2}m$, sillä $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

Lineaarinen malli

- Jos suureiden x ja y välinen riippuvuus on muotoa $y = kx + b$, niin suureiden välillä on *lineaarinen riippuvuus*.
- Esim. 1: Pariston napajännitteen U riippuvuus virrasta I

Pariston kuormituskäyrä

$$U = E - R_s I$$

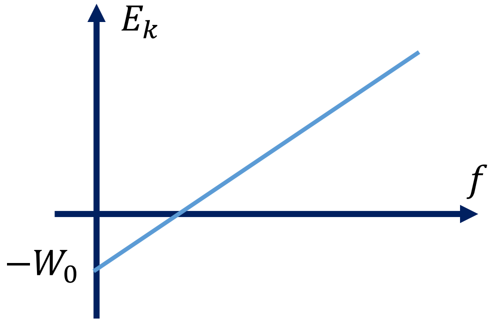


E = pariston lähdejännite
(vakiotermi eli pystyakselin leikkauspiste)

R_s = sisäinen resistanssi
(laskevan suoran kulmakerroin on $-R_s$)

- Esim. 2: Valosähköilmiön elektronien maksimiliike-energian E_k riippuvuus taajuudesta f

$$E_k = hf - W_0$$



h = Planckin vakio
(suoran kulmakerroin)

W_0 = irrotustyö
(suoran vakiotermi on $-W_0$)

Lineaarinen sovitus

- Lineaarisen sovituksen voi tehdä esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmalla (trendiviiva) tai Geogebralla.
- Muista laittaa näkyviin sovitussuoran yhtälö.
- Päättele kulmakertoimen yksikkö akselien yksiköistä.
  - Kulmakertoimen yksikkö on y –akselin yksikkö jaettuna x –akselin yksiköllä.
- Lineaarinen sovitus Geogebralla:

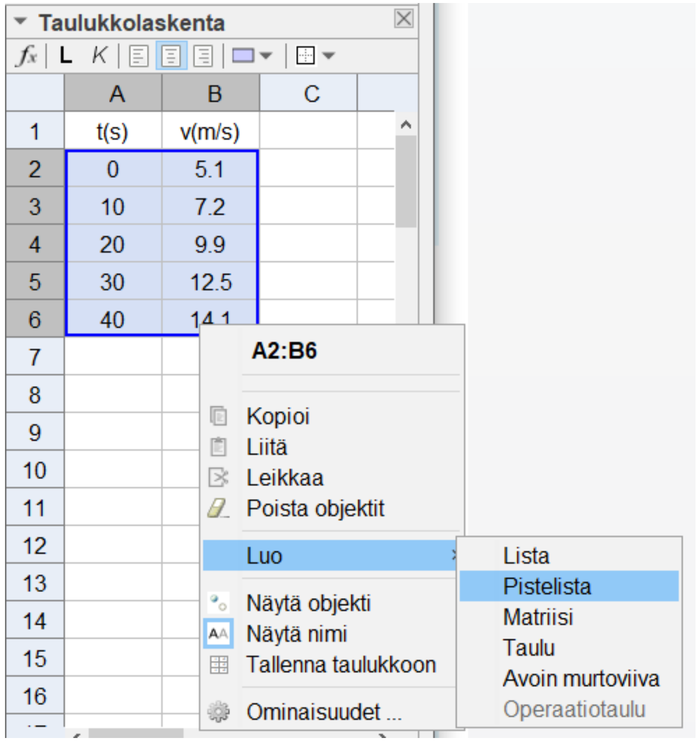
1. Avaa (tarvittaessa kopioi LibreOfficesta) tai syötä taulukkoarvot Geogebran taulukkonäkymässä. (Muista, että Geogebrassa desimaalierotin on piste eikä pilkku.)
2. Laita sarakkeiden ensimmäisiin soluihin suureiden tunnukset yksiköineen, jotta taulukkoa on helpompi tulkita.

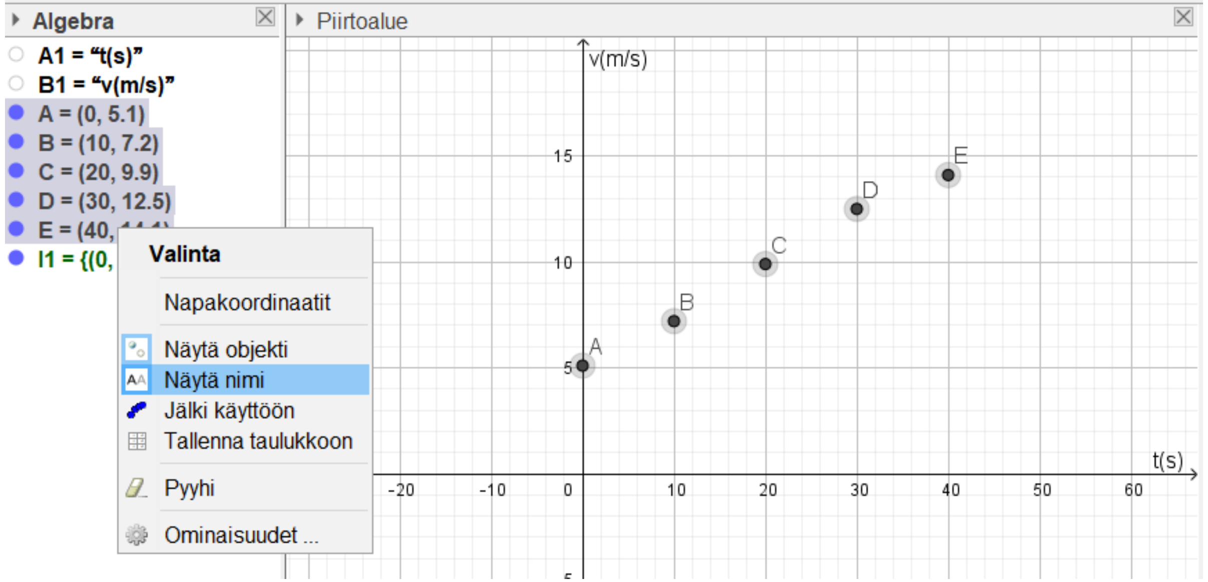
3. Valitse lukuja sisältävät solut ja luo pistelista.

(Sovituksen voisi tehdä myös toiminnolla kahden muuttujan regressioanalyysi)

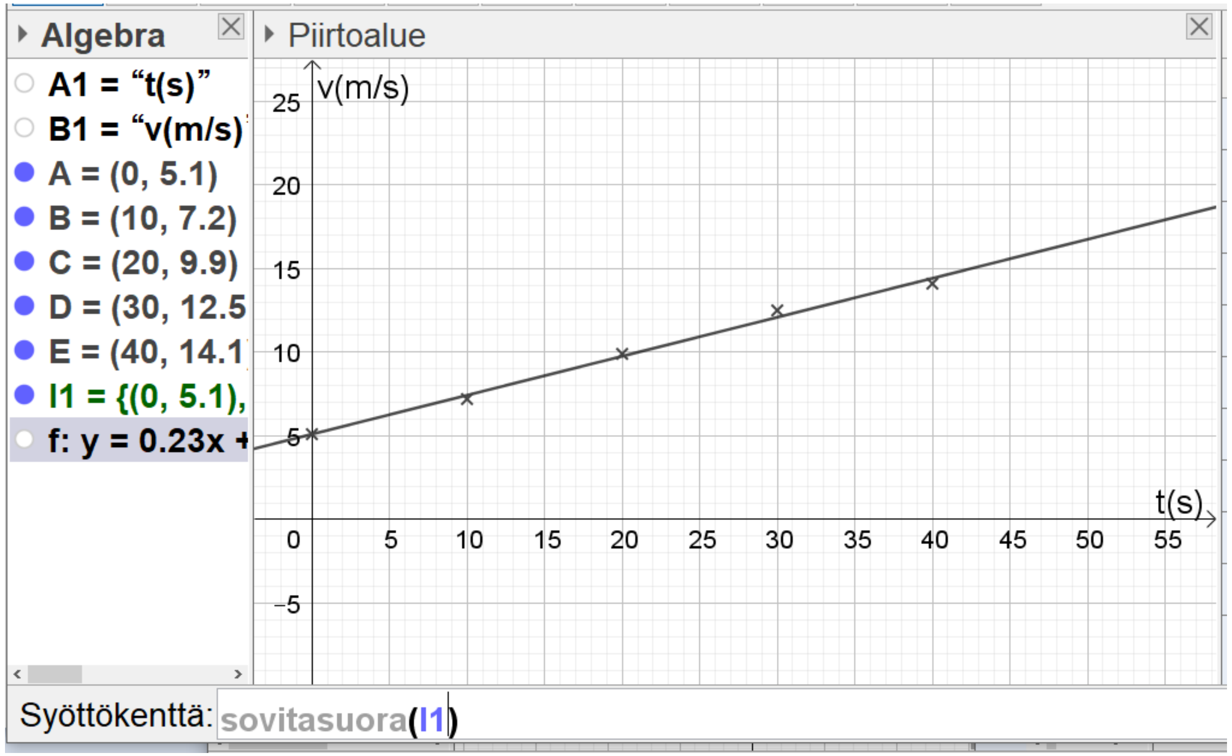
3. Pistelista tulee oletuksena nimellä l1. Skaalaa asteikko sopivaksi akseleita venyttämällä tai kutistamalla.

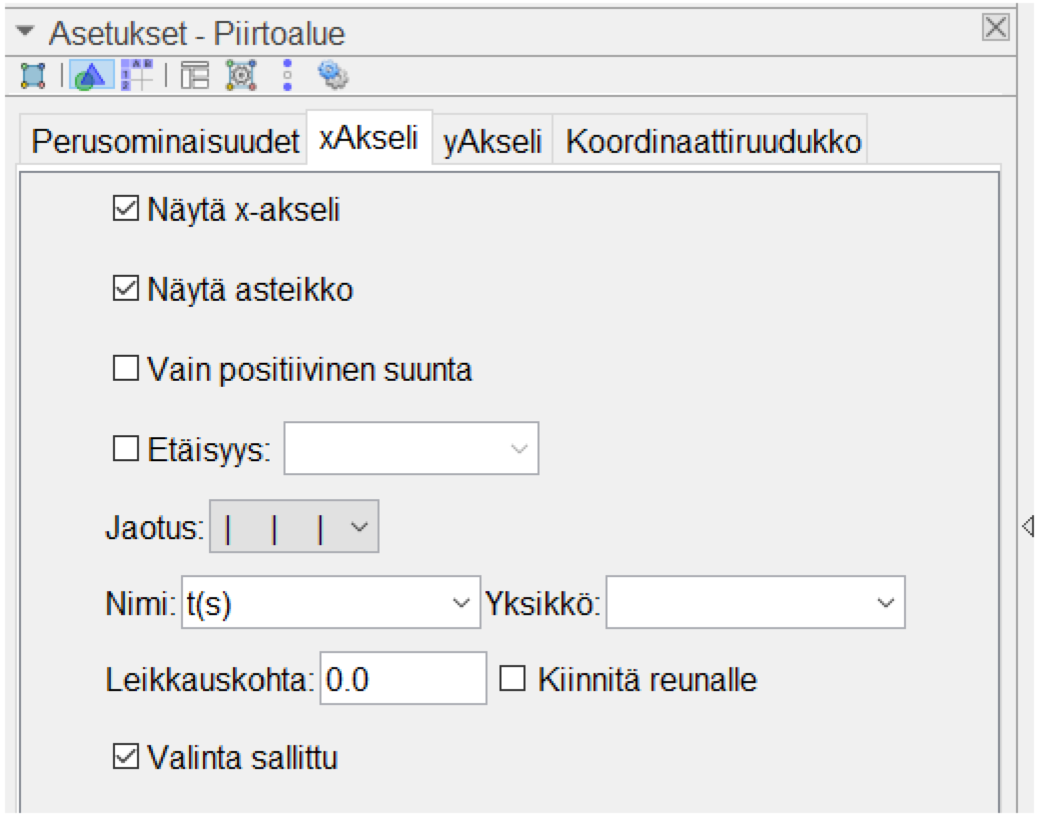
4. Valitse sovituspisteet (shift + hiiren vasen) ja poista nimet näkyvistä. Voit myös halutessasi muotoilla pisteet esim. rasteiksi.



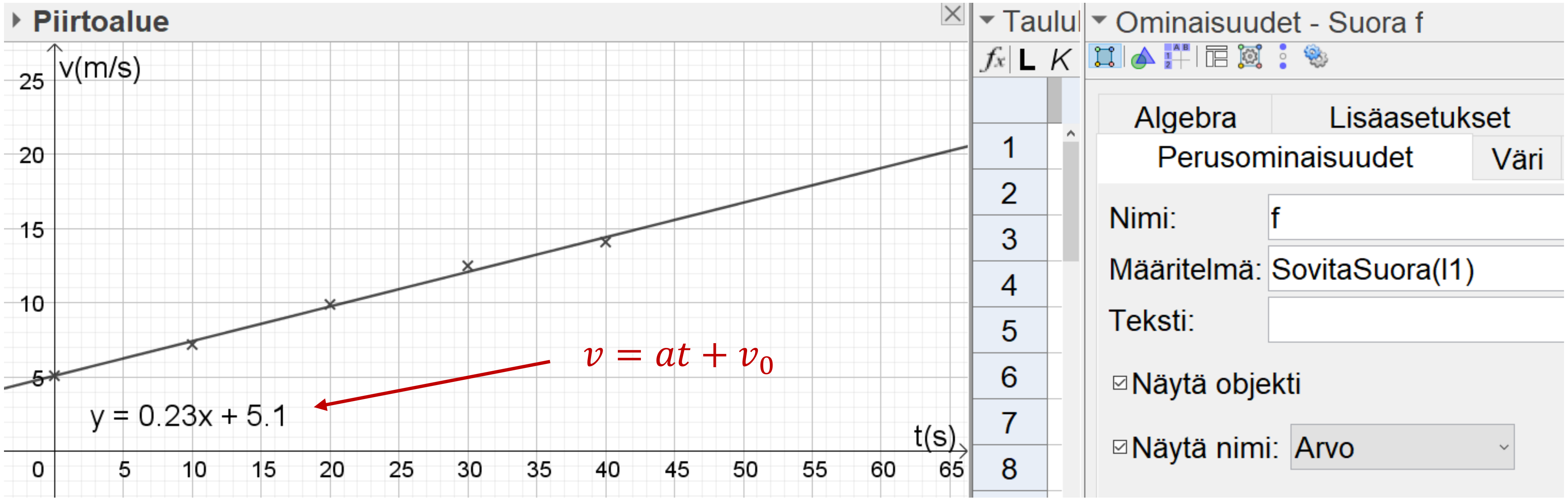


6. Laita akseleille oikeat nimet piirtoalueen asetuksista (klikkaa akselien kohdalla hiiren oikeaa näppäintä)
7. Kirjoita komento **SovitaSuora(l1)**





8. Laita suoran yhtälö näkyviin valitsemalla suoran ominaisuuksista ”Näytä nimi:”-kohdasta vaihtoehto ”Arvo”



9. Muuta tarvittaessa ”Asetukset”-valikosta pyöristystarkkuutta.
10. Päättele kulmakertoimen yksikkö.

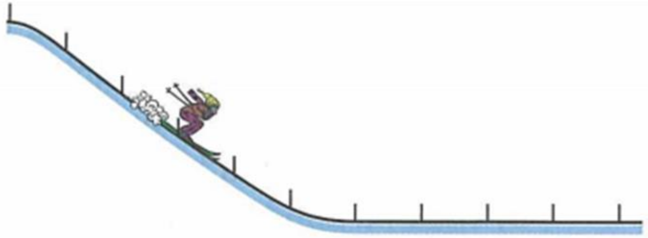
(Kuvan esimerkissä kulmakerroin on kiihtyvyys $[a] = \frac{[v]}{[t]} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)

Epälineaarinen sovitus

- Jos suureiden välillä ei ole lineaarista riippuvuutta, sovitusfunktio ei voi olla ensimmäisen asteen polynomifunktio.
- Jos voit päätellä tehtävänannosta funktion tyypin, niin kokeile vastaavaa sovitusfunktiota. Taulukkolaskentaohjelmilla ja Geogebralla voit sovittaa mm. korkeamman asteen polynomifunktioita ja eksponenttifunktioita.
- Jos tehtävänantoon ei liity tai siitä ei voi päätellä funktion tyyppiä, niin kokeile erilaisia sovitteita ja valitse niistä sopivin.
- Mieti onko käyrän tangentilla tai käyrän rajaamalla pinta-alalla tässä fysikaalista tulkintaa.
  - Tangentin avulla saadaan muutosnopeuksia (jos vaaka-akselilla on aika t) tangentin kulmakertoimesta tai derivaatasta.
  - Pinta-ala saadaan integraalina. (Pinta-alaa vastaavan suureen yksikkö on akselien yksiköjen tulo.)

Yo-tehtävä K2010/2

Suksien luisto-ominaisuuksia testaava hiihtäjä liukuu ohessa kuvatun tapaista rinnettä. Kun hiihtäjän nopeus mitataan valoporteilla, jotka ovat ratakäyrää pitkin mitattuna 10,0 m:n etäisyydellä toisistaan, saadaan seuraavan taulukon mukaiset tulokset:



s/m	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
v/(m/s)	0,0	6,2	8,9	10,7	12,2	12,2	11,4	10,5	9,6	8,8	8,0

a) Esitä graafisesti hiihtäjän nopeus paikan funktiona. (3 p.)
b) Missä kohdassa hiihtäjän nopeus on suurimmillaan? (1 p.)
c) Minkä voimien vuoksi hiihtäjän nopeus alkaa pienentyä? (2 p.)

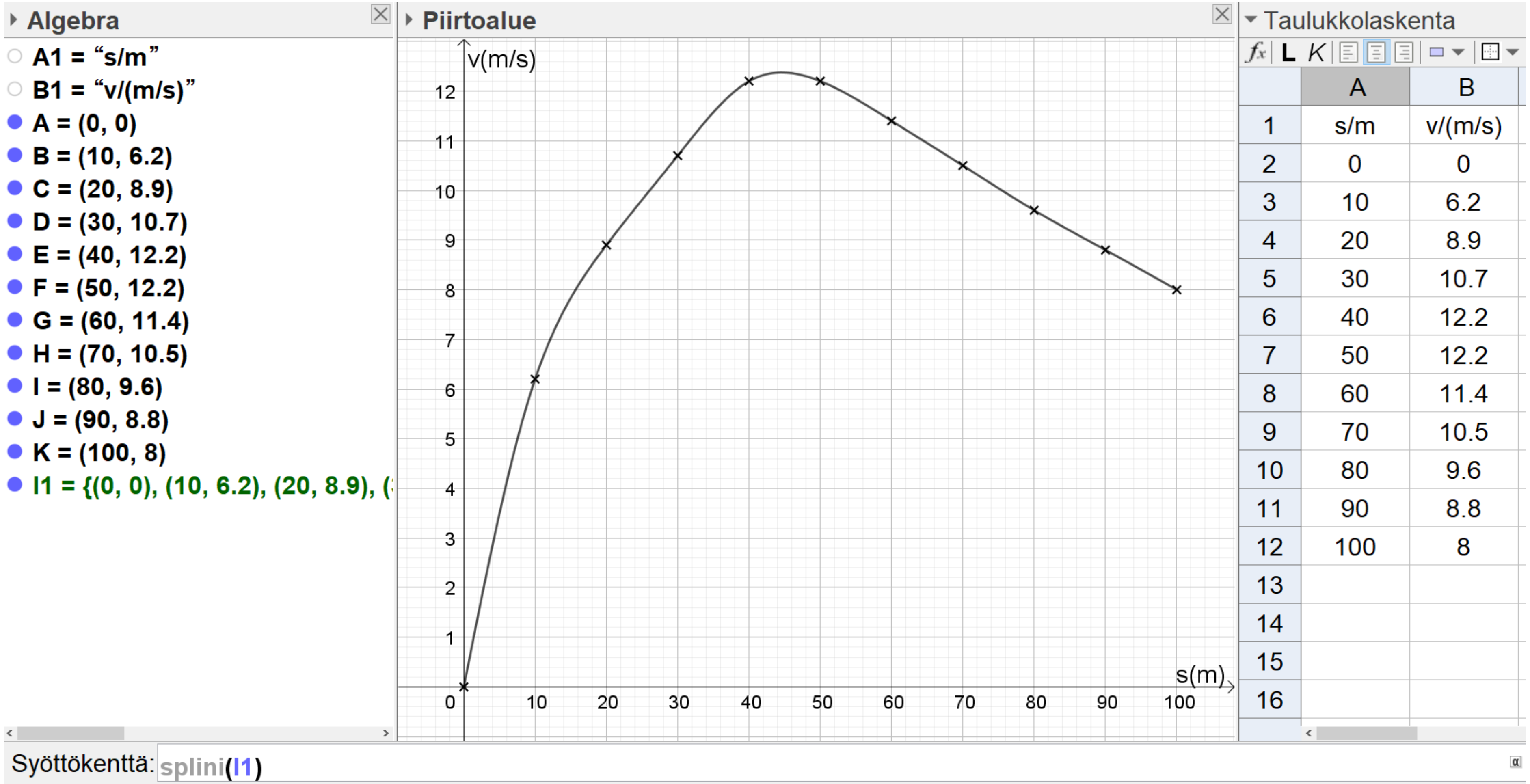
Ratkaisu:

a) Tilanne ei noudata mitään yksinkertaista mallia, joten sovitetaan mittauspisteiden kautta mahdollisimman hyvin kulkeva käyrä.

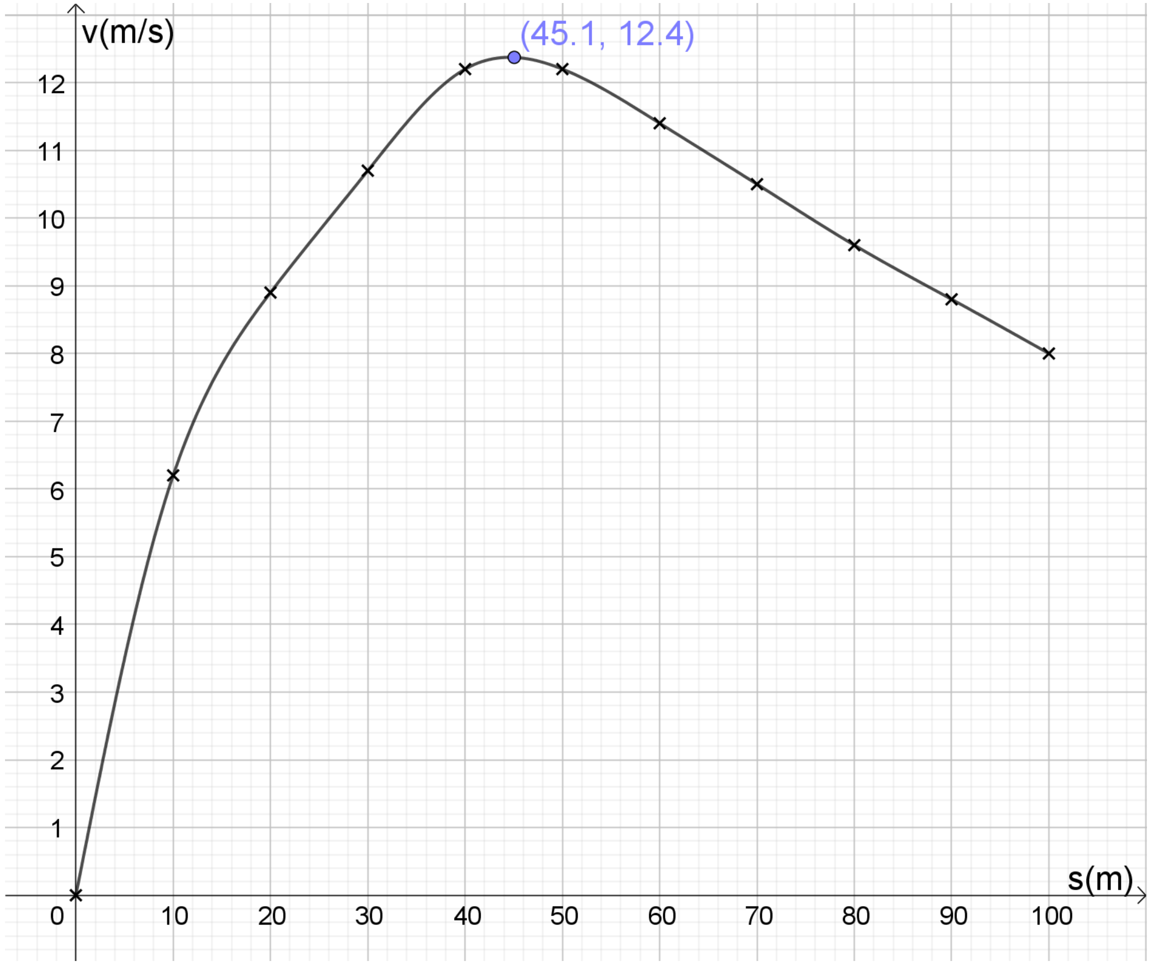
Sovituksena voidaan käyttää korkean asteen polynomifunktiota esimerkiksi komennolla **SovitaPolynomi(l1,8),** kun **l1** on mittaustuloksista tehty pistelista.
Jos-komennolla voi käyrän rajata sopivalle välille: **Jos(0 ≤ x ≤ 100, SovitaPolynomi(l1, 8))**

Tilanteeseen sopivamman käyrän saa kuitenkin *splinin* avulla. Splini on paloittain määritelty (parametrinen) polynomifunkito.

1. Taulukoidaan mittaustulokset ja tehdään pistelista.
2. Poistetaan turhat pisteiden nimet.
3. Määritetään akselien otsikot ja skaalataan asteikko sopivaksi.
4. Sovituskäyrä saadaan nyt komennolla **Splini(l1).**



b) Spliniä ei voida Geogebran avulla analysoida kuten muita sovitteita. Kohta, jossa nopeus on suurimmillaan voidaan joka tapauksessa arvioida silmämääräisesti ja ”Piste objektilla”-toimintoa käyttäen



Nopeus on kuvaajan perusteella suurimmallaan n. 45 m kohdalla.

c) Nopeus alkaa pienentyä (tasaisella osalla) suksien ja lumen välisen liukukitkan sekä hiihtäjään vaikuttavan ilmanvastuksen vuoksi.

Esimerkki:

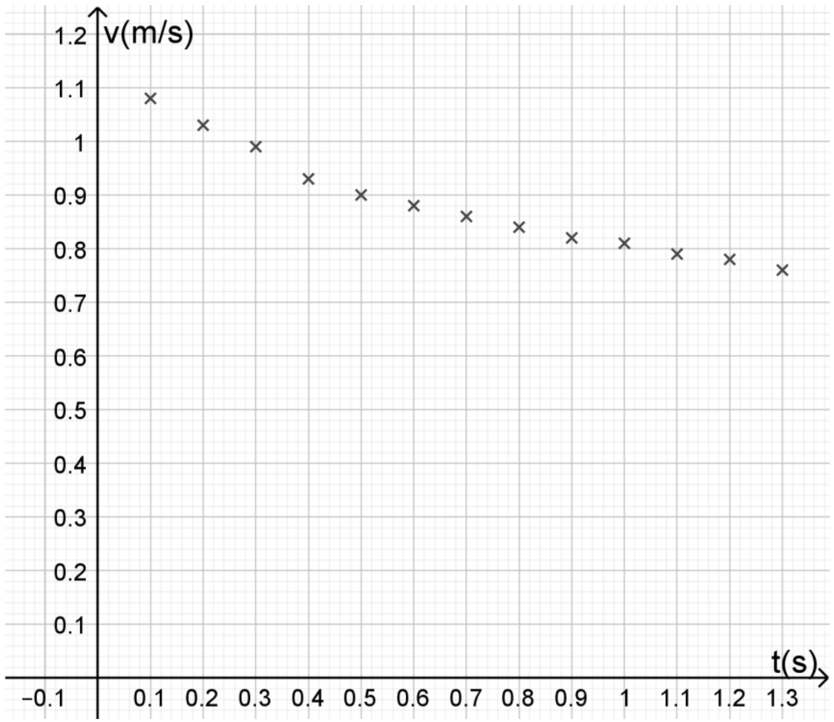
t (s)	v (m/s)
0,1	1,08
0,2	1,03
0,3	0,99
0,4	0,93
0,5	0,9
0,6	0,88
0,7	0,86
0,8	0,84
0,9	0,82
1	0,81
1,1	0,79
1,2	0,78
1,3	0,76

Vaunun liikettä tutkittiin vaakasuoralla ilmatyynyradalla. Vaunu tönäistiin liikkeelle, jonka jälkeen sen nopeutta mitattiin tietokoneeseen liitetyllä ultraäänianturilla. Mittausaineisto on taulukossa.

a) (t. 1-11) määritä vaunun kiihtyvyys hetkellä $0{,}6\ s$.

b) Määritä vaunun kulkema matka aikavälillä $0{,}5\ s - 1{,}0\ s$.

a) Siirretään mittaustulokset Geogebraan ja muodostetaan pistelista (l1).

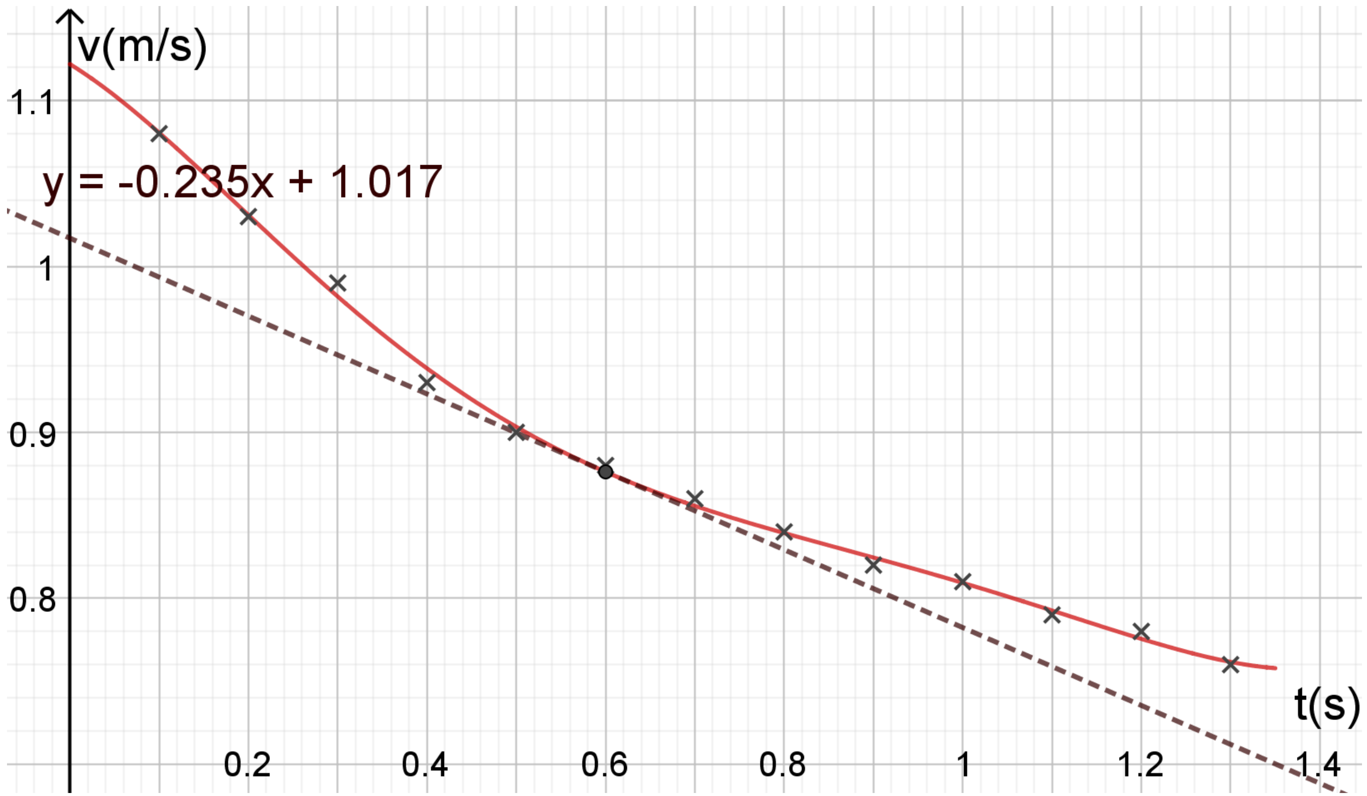


Nopeuden muutos ei vaikuta lineaariselta, joten sovitetaan jokin korkeamman asteen polynomi. (Nopeus vaikuttaa ilmanvastukseen.)

Kaaviossa on tyhjää tilaa, joten muokataan piirtoaluetta. Huomaa, että jos akselia ei näy, niin akselin otsikko pitää kirjoittaa erikseen (teksti-työkalulla).

Sovitetaan polynomi komennolla ”SovitaPolynomi”. Viidennen asteen polynomi vaikuttaa sopivalta sovitteelta, joten kirjoitetaan syöttökenttään **SovitaPolynomi(l1,5).**
Käyrä voidaan myös rajata valmiiksi sopivalle välille: **Jos(0 ≤ x ≤ 1.35, SovitaPolynomi(l1, 5)).**

Merkitään tangenttipiste esimerkiksi kirjoittamalla sen koordinaatit syöttökenttään: **(0.6, f(0.6)).**
Piirretään nyt tangentti Tangentit-työkalulla (tai kirjoittamalla **Tangentti(N,f)**, jos N on sivuamispiste ja f sovitettu funktio.



Kiihtyvyys ajanhetkellä $0{,}6\ s$ on tangentin kulmakerroin $k \approx -0{,}235$.

Siis $a \approx -0{,}24 \frac{m}{s^2}$.

Muista lisätä akselin otsikko! Asteikon lukuväliä voi myös muuttaa asetuksista.

b) Sovitefunktion aikavälillä rajaama pinta-ala on tällä aikavälillä vaunun kulkema matka.

Poistetaan ylimääräiset objektit ja skaalataan kaavioalue uudestaan.

Vaunun kulkema matka s välillä $0{,}5\text{ s} - 1{,}0\text{ s}$ saadaan (fysikaalisena) integraalina komennolla **Integraali(f,0.5,1).**

Geogebra antaa pinta-alaksi 0,425.

Siis $s \approx 0{,}43\text{ m}$.

Yksikkö on $s \cdot \frac{m}{s} = m$.