Aktiivisuus

- *Aktiivisuus* A kuvaa ytimien hajoamisnopeutta
- Keskimääräinen aktiivisuus A_k on ydinten hajoamisten määrä aikayksikössä

$$A_k = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \left|\frac{\Delta N}{\Delta t}\right|$$

$A > 0$, mutta $\Delta N < 0$. Tämän vuoksi kaavassa on miinus-merkki tai itseisarvo.

  - Tässä ΔN on ytimien määrän muutos ja Δt hajoamisiin kuluva aika

- Hetkellinen aktiivisuus (ajanhetkellä t) saadaan derivaatan avulla:

$$A(t) = -\frac{d}{dt}N(t)$$

- Aktiivisuuden yksikkö on $[A] = 1/\mathrm{s} = 1\ \mathrm{Bq}$ (bequerel) (TI-Nspire: Bq sama kuin Hz)

- Mitä enemmän radioaktiivisia ytimiä on, sitä enemmän tapahtuu myös hajoamisreaktioita. Hetkellinen aktiivisuus $A = A(t)$ on siis suoraan verrannollinen hajoavien ydinten määrään N ja voidaan merkitä

$$A = \lambda N.$$

- Tässä verrannollisuuskerroin λ on radioaktiiviselle aineelle ominainen *hajoamisvakio*, joka kuvaa yksittäisen ytimen hajoamisen todennäköisyyttä.
- Ytimen pysyvyyttä kuvaa myös *puoliintumisaika* $T_{1/2}$. Tämä on aika, jonka kuluessa keskimäärin puolet radioaktiivisista ytimistä on hajonnut.
  - Yksittäisen ytimen hajoamista ei voida tarkkaan ennustaa, mutta kun radioaktiivisia ytimiä on näytteessä suuri määrä, puoliintumisajan kuluttua hajonneiden ytimien osuus on hyvin lähellä 50 prosenttia (vrt. klaavojen osuus, kun kolikon heittoa toistetaan hyvin monta kertaa)

Hajoamislaki

- Kun muutos on verrannollinen määrään, voidaan muutosta mallintaa sopivalla eksponenttifunktiolla.
- Näin myös radioaktiivisten ydinten määrä noudattaa eksponentiaalista mallia, jota kutsutaan hajoamislaiksi:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

  - N_0 on alkuperäinen ydinten määrä
  - (Hajoamislaki voidaan todistaa ratkaisemalla *differentiaaliyhtälö* $-\frac{d}{dt}N(t) = \lambda N(t)$ alkuarvolla $N(0) = N_0$)

- Myös aktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti vastaavalla tavalla

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

  - A_0 on alkuperäinen aktiivisuus

- Hajoamisvakion ja puoliintumisajan välillä on tärkeä yhteys

$$T_{½} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Perustelu oppikirjassa s. 158.

- Radioaktiivisten ydinten määrää (ja vastaavasti aktiivisuutta) voidaan (esim. matematiikan tehtävissä) mallintaa muillakin eksponenttifunktioilla kuin e –kantaisella hajoamislain mukaisella muodolla $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T_{½}}}$$

Kantalukuna 0,5 ja eksponenttina puoliintumisten (puoliintumisjaksojen) määrä

$$N(t) = N_0 \cdot k^t$$

Kantalukuna prosenttikerroin $0 < k < 1$, jonka mukaisesti ydinten määrä vähenee aina samalla kertoimella k tietyssä aikayksikössä (esim. vuodessa).

S2011/9 a, b

Palovaroittimessa on α-aktiivista ^{241}Am-isotooppia, jonka hajoamisreaktio on

$$^{241}_{95}\mathrm{Am} \rightarrow ^{237}_{93}\mathrm{Np} + ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

a) Palovaroittimen ^{241}Am-aktiivisuus on 38 kBq. Kuinka monta grammaa ^{241}Am-isotooppia varoittimessa on?

b) Varoitin lakkaa toimimasta, jos sen aktiivisuus laskee alle 25 kBq:n. Kuinka pitkä aika tähän kuluu?

a) Aktiivisuus $A = 38\ \mathrm{kBq}$. Taulukkokirjan mukaan atomimassa on $m_{Am} = 241{,}05683$ u ja puoliintumisaika on $T_{½} = 432{,}2$ a.

Ratkaistaan massa aktiivisuuden kaavan $A = \lambda N$ avulla. Tässä hajoamisvakio $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}$.

Hiukkasten määrä N saadaan jakamalla näytteen massa m atomin massalla m_{Am}:

$$N = \frac{m}{m_{Am}}$$

Hiukkasten määrälle saa lausekkeen myös ainemäärän $n = \frac{m}{M}$ ja Avogadron luvun N_A avulla tulkitsemalla atomimassan moolimassaksi M:

$$N = nN_A = \frac{m}{M} N_A$$

Siis $$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{½}} N = \frac{\ln 2}{T_{½}} \cdot \frac{m}{m_{Am}},$$

josta saadaan ratkaistua massa:

$$m = A \frac{m_{Am} T_{½}}{\ln 2} \approx 2{,}993 \cdot 10^{-7}\ \text{g} \approx 0{,}30\ \mu\text{g}$$

Vastaus:
Palovaroittimessa on n. 0,30 µg ^{241}Am-isotooppia.

TI-Nspire:

$mam := 241.05683 \cdot \_u$	$4.00284283486E{-}25 \cdot \_kg$
$tp := 432.2 \cdot \_yr$	$13638903406.3 \cdot \_s$
$a := 38000 \cdot \_Hz$	$38000. \cdot \_Hz$
$a \cdot \dfrac{mam \cdot tp}{\ln(2)}$	$2.99299594031E{-}10 \cdot \_kg$
$2.9929959403098E{-}10 \cdot \_kg ▸ \_gm$	$2.99299594031E{-}7 \cdot \_gm$

Tai solve-toiminnolla:

$\lambda := \dfrac{\ln(2)}{tp}$	$5.08213277793E{-}11 \cdot \_Hz$
$n := \dfrac{m}{mam}$	$2.49822449008E24 \cdot m \cdot \dfrac{1}{\_kg}$
$\text{solve}(a = \lambda \cdot n, m)$	$m = 2.99299594031E{-}10 \cdot \_kg$

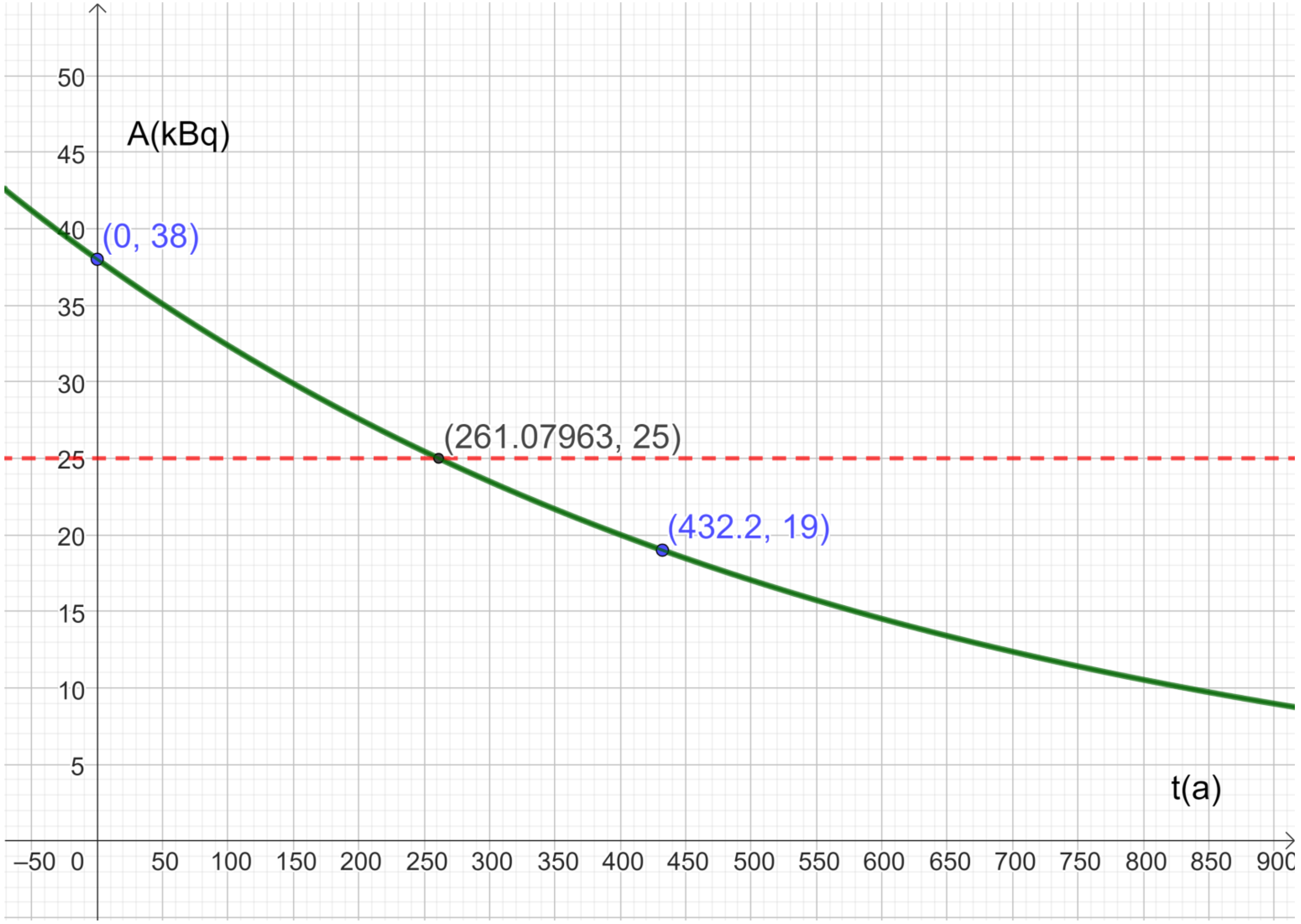
b) Merkitään nyt alkuperäinen aktiivisuus $A_0 = 38\ \mathrm{kBq}$.

Aktiivisuus A vähenee eksponentiaalisesti hajoamislain $A = A_0 e^{-\lambda t}$ mukaisesti. Ratkaistaan laskinohjelmalla yhtälöstä t, kun $A = 25\ \mathrm{kBq}$ ja $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{½}}$.

$a0{:}=38000\cdot \_Hz$	$38000.\cdot \_Hz$
$a{:}=25000\cdot \_Hz$	$25000.\cdot \_Hz$
$\mathrm{solve}\left(a=a0\cdot \mathbf{e}^{-\lambda\cdot t},t\right)$	$t=8238870434.01\cdot \_s$
$8238870434.01\cdot \_s \blacktriangleright \_yr$	$261.07962609\cdot \_yr$

Vastaus: Aktiivisuus laskee n. 260 vuodessa arvoon 25 kBq.

Eksponenttifunktion mallinnus GeoGebralla:



$$f(x) = \text{SovitaEksp}(\{A, B\})$$

$$= 38\, e^{-0.0016x}$$

$$g(x) = \text{SovitaKasvu}(\{A, B\})$$

$$= 38 \cdot 0.9984^{x}$$

Tästä versiosta näkee prosenttikertoimen, jolla aktiivisuus pienenee vuosittain (vähenee 0,16 % vuodessa).

Toinen piste (432,2; 19) voidaan päätellä puoliintumisajan avulla: Puoliintumisajan kuluttua aktiivisuus on puolet alkuperäisestä.

Oppikirjan esimerkki 5, s. 165 laskinohjelmalla:

Mallinnetaan uraani-isotooppien määriä hajoamislain mukaisesti eksponenttifunktioilla. Oletuksen mukaan supernovaräjähdyksessä syntyi yhtä suuri määrä N_0 kumpaakin isotooppia.

U-238:n määrä ajan t (vuosina) funktiona:

$$N_{U-238}(t) = N_0 e^{-\lambda_{U-238} \cdot t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½,U-238}} t}$$

Vastaavasti U-235:n määrä:

$$N_{U-235}(t) = N_0 e^{-\lambda_{U-235} \cdot t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{½,U-235}} t}$$

Supernovaräjähdyksestä kulunut aika saadaan selvittämällä millä ajanhetkellä t isotooppisuhde on havaitun mukainen eli ratkaisemalla yhtälö

$$\frac{N_{U-235}(t)}{N_{U-238}(t)} = \frac{0{,}720\ \%}{99{,}275\ \%} = \frac{0{,}720}{99{,}275}$$

$tu235 := 7.038 \cdot 10^{8} \cdot \_yr$	$2.22098\mathrm{E}16 \cdot \_s$
$tu238 := 4.468 \cdot 10^{9} \cdot \_yr$	$1.40996\mathrm{E}17 \cdot \_s$
$nu235(t) := n0 \cdot \mathbf{e}^{\frac{-\ln(2)}{tu235} \cdot t}$	*Valmis*
$nu238(t) := n0 \cdot \mathbf{e}^{\frac{-\ln(2)}{tu238} \cdot t}$	*Valmis*
⚠ $\mathrm{solve}\left(\frac{nu235(t)}{nu238(t)} = \frac{0.72}{99.275}, t\right)$	$t = 1.87365\mathrm{E}17 \cdot \_s$
$1.87365\mathrm{E}17 \cdot \_s ▸ \_yr$	$5.93737\mathrm{E}9 \cdot \_yr$

$t \approx 5{,}94 \cdot 10^{9}$ a eli supernovaräjähdys tapahtui n. 5,94 miljardia vuotta sitten.