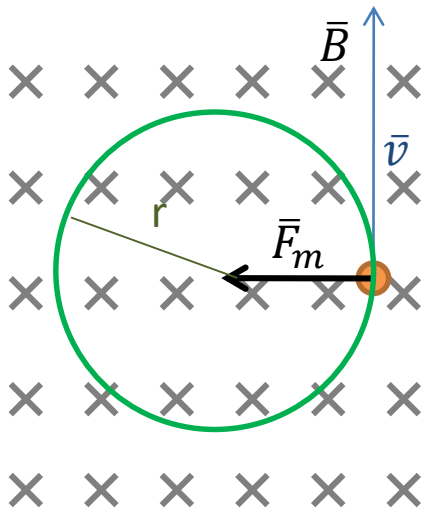
Liikkuvan varatun hiukkasen rata magneettikentässä

- Tarkastellaan positiivisesti varautuneen hiukkasen liikettä tyhjiössä, kun hiukkanen tulee kohtisuorasti vakionopeudella homogeeniseen magneettikenttään. (Muiden voimien, kuten painovoiman, vaikutus on mitätön.)
- Magneettisen (nopeuteen nähden kohtisuoran) voiman vuoksi hiukkanen joutuu ympyräradalle, jolloin liikeyhtälö on Newtonin II lain mukaisesti

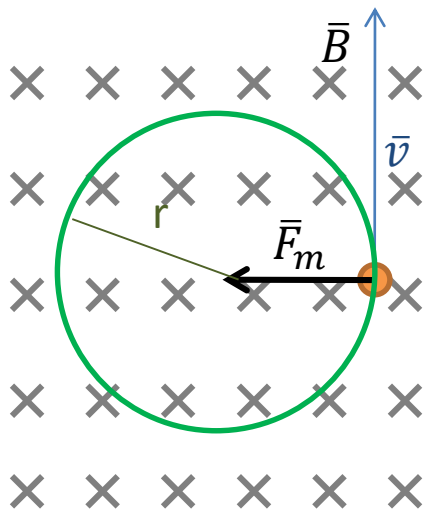
$$\sum \bar{F} = m\bar{a}_n \quad \Rightarrow \quad qvB = m\frac{v^2}{r} \quad \Leftrightarrow \quad qB = m\frac{v}{r}$$



- Ympyräradan säteeksi saadaan $r = \frac{mv}{qB}$.
- Ympyräradan säde on siis suoraan verrannollinen hiukkasen massaan. Tähän tulokseen perustuu *massaspektrometrin* (ks. oppikirja s. 126-127) toiminta.

- Kun hiukkanen kiertää ympyrärataa magneettikentässä (vakio)vauhdilla v, se kulkee kierrosajassa T ympyrän kehän pituuden $s = 2\pi r$. Siis

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v}.$$



- Toisaalta radan säteelle pätee ehto $r = \frac{mv}{qB}$, joten

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi \cdot \frac{mv}{qB}}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

- Tuloksesta huomataan ettei kierrosaika riipu hiukkasen nopeudesta (koska nopeuden kasvaessa kasvaa vastaavassa suhteessa myös radan säde)
- Hiukkasen kierrostaajuus $f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$ on myös vakio. Tätä voidaan hyödyntää kiihdytettäessä hiukkasia (vaihtojännitteellä) *syklotronissa* (ks. oppikirja s. 123-124).

Esimerkkitehtävä:
Syklotronilla kiihdytetään deuteroneja. Kun hiukkasten uloimman radan säde on $45\ \mathrm{cm}$, niiden liike-energia on $9{,}6\ \mathrm{M}e\mathrm{V}$. Laske **a)** kiihdytysjännitteen taajuus, **b)** hiukkasten ratatasoa vastaan kohtisuoran magneettikentän magneettivuon tiheys.

a) Lasketaan ensin deuteronien nopeus liike-energian $E_k = 9{,}6\ \mathrm{MeV}$ (eV = elektronivoltti) avulla. Deuteronin (protoni + neutroni) massa on taulukkokirjan mukaan $m = 2{,}013\ 5532\ \mathrm{u}$. Tässä u on ns. *atomimassayksikkö*.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} \approx 3{,}033 \cdot 10^7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

TI-Nspire:

$m{:=}2.0135532\cdot_\mathrm{u}$	$3.34358375128\mathrm{E}^{-27}\cdot_\mathrm{kg}$
$ek{:=}9.6\cdot 10^6\cdot_\mathrm{eV}$	$1.53808956864\mathrm{E}^{-12}\cdot_\mathrm{J}$
$\mathrm{solve}\left(ek{=}\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2, v\right) \mid v>0$	$v{=}30331906.4738\cdot\frac{_\mathrm{m}}{_\mathrm{s}}$

Tällä nopeudella kierrosaika uloimmalla ympyräradalla (säde $r = 45\ \mathrm{cm}$) on

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v} \approx 9{,}3216 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}.$$

$v := 30331906.473812 \cdot \frac{_m}{_s}$	$30331906.4738 \cdot \frac{_m}{_s}$
$r := 45 \cdot _cm$	$0.45 \cdot _m$
$t := \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$	$9.32164745619E^{-8} \cdot _s$

Pyörimisnopeus ja samalla kiihdytysjännitteen taajuus on

$$f = \frac{1}{T} \approx 10\ 727\ 700\ \mathrm{Hz} \approx 11\ \mathrm{MHz}.$$

$\frac{1}{t}$	$10727717.4416 \cdot _Hz$

b) Deuteroni joutuu ympyräradalle, koska magneettikenttä on kohtisuorassa hiukkasen nopeusvektoriin $\bar{v}$ nähden. Tällöin magneettisen voiman suuruus on $F_m = qvB$.
Tässä $q = e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C (alkeisvaraus) ja B on kysytty magneettivuon tiheys.

Newtonin II lain mukaisesti liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m\bar{a}_n$, missä normaalikiihtyvyyden suuruus on $a_n = \frac{v^2}{r}$.
Ainoa tilanteessa oleellisesti vaikuttava voima on magneettinen voima F_m, joten liikeyhtälö voidaan kirjoittaa skalaarimuotoon

$$qvB = m\frac{v^2}{r}.$$

Magneettivuon tiheys on siis

$$B = \frac{mv}{qr} \approx 1{,}4 \text{ T}.$$

$$\text{solve}\left(_q \cdot v \cdot b = m \cdot \frac{v^2}{r}, b\right)$$

$$b = 1.40665957491 \cdot _\text{T}$$