FY5 näytetehtävien ratkaisut

1. Ratkaistaan yhden soittimen intensiteetti I_1 etäisyydellä $r_1 = 2{,}5\ \mathrm{m}$ intensiteettitason kaavasta

$$L_1 = 10\ dB \cdot \log \frac{I_1}{I_0},$$

missä $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ on kuulokynnyksen intensiteetti ja $L_1 = 75\ \mathrm{dB}$. Laskinohjelmalla intensiteetiksi saadaan $I_1 \approx 3{,}162 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{W/m^2}$

$i0{:=}10^{-12}$	$\dfrac{1}{1000000000000}$
$\mathrm{solve}\left(75=10\cdot \log_{10}\left(\dfrac{i1}{i0}\right),i1\right)$	$i1{=}3.16227766017\mathbf{E}{-5}$
$i1{:=}3.16227766017\mathbf{E}{-5}$	$3.16227766017\mathbf{E}{-5}$

Intensiteetti heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön, joten

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \Leftrightarrow \quad I_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} I_1,$$

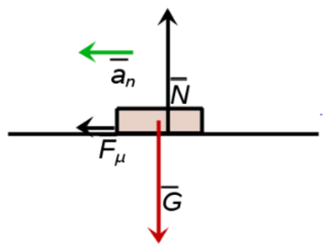
missä I_2 on yhden soittimen intensiteetti etäisyydellä $r_2 = 6{,}0\ \mathrm{m}$. Kolmen soittimien intensiteetti tällä etäisyydellä on $I = 3I_2$ ja tätä vastaava intensiteettitaso $L \approx 72\ \mathrm{dB}$.

$i{:=}\dfrac{(2.5\cdot \_\mathrm{m})^2}{(6.\cdot \_\mathrm{m})^2}\cdot 3\cdot i1$	$1.64701961467\mathbf{E}{-5}$
$10\cdot \log_{10}\left(\dfrac{i}{i0}\right)$	72.166987713

2. Kolikko on tasaisessa ympyräliikkeessä ja keskeisvoimana toimii kitka. Tasaisessa ympyräliikkeessä kolikolla on vain normaalikiihtyvyyttä $\bar{a}_n$, jonka suunta on kohti ympyräradan keskipistettä. Newtonin II lain mukaan

$$\sum \bar{F} = m\bar{a}_n,$$

missä m on kolikon massa. Kolikon paino $\bar{G}$ ja levyn tukivoima $\bar{N}$ kumoavat toisensa (ks. voimakuvio), joten Newtonin II laki saa skalaarimuodon



$$F_\mu = ma_n = m\frac{v^2}{r},$$

missä v on kolikon ratanopeus. Tämä voidaan esittää kierrosajan $T = 1{,}8\ \mathrm{s}$ ja radan säteen $r = 9{,}2\ \mathrm{cm}$ avulla muodossa

$$v = \frac{2\pi r}{T} \approx 0{,}321\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

$t{:=}1.8\cdot\_s$	$1.8\cdot\_s$
$r{:=}9.2\cdot\_cm$	$0.092\cdot\_m$
$v{:=}\dfrac{2\cdot\pi\cdot r}{t}$	$0.321140582367\cdot\dfrac{\_m}{\_s}$

Kitkavoima on verrannollinen tukivoimaan $\overline{N}$ joka on painon suuruinen: $N = G$.

$$F_\mu = \mu N = \mu G = \mu mg,$$

josta edelleen

$$\mu mg = m\frac{v}{r}.$$

Tulos ei riipu kolikon massasta, koska massa voidaan supistaa pois:

$$\mu g = \frac{v}{r}$$

Kitkakertoimeksi saadaan (laskinohjelmalla) $\mu \approx 0{,}11$.

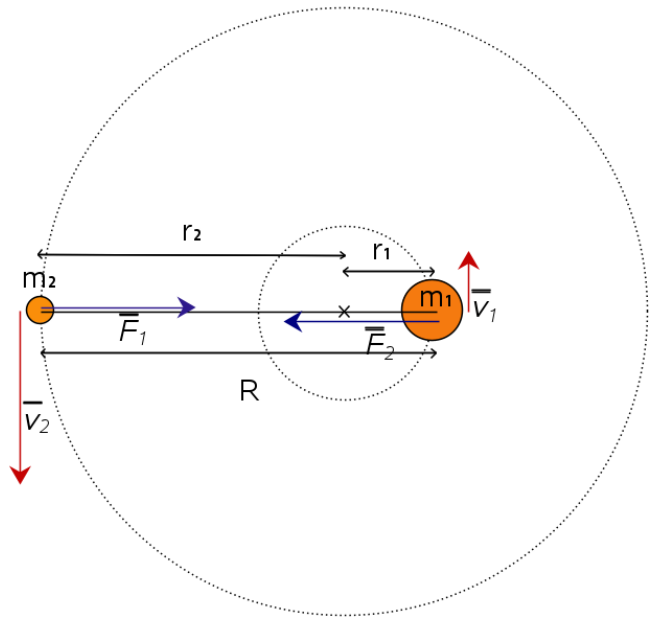
$\mathrm{solve}\left(\mu\cdot\_g=\dfrac{v^2}{r},\mu\right)$	$\mu{=}0.11430938239$

3. Piirretään mallikuvio tilanteesta.

Tähtien välimatka $R = 0{,}062$ AU

Algol Aa1:n massa $m_1 = 3{,}17M$, missä $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg on Auringon massa.

Kierrosaika $T = 2{,}87$ d.



Tähdet vaikuttavat toisiinsa painovoimalain mukaisesti yhtä suurilla, mutta vastakkaisilla voimilla

$$F_1 = F_2 = \gamma\frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

Koska tähdet ovat tasaisessa ympyräliikkeessä, molempien tähtien kiihtyvyydet ovat vain normaalikiihtyvyyttä $a_n = v^2/r$ ja tähtien liikeyhtälöt saadaan Newtonin toisesta laista

$$\sum \overline{F} = m\overline{a}_n.$$

Koska tähtiin vaikuttaa vain gravitaatiovoima, tähden Algol Aa2 liikeyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\gamma \frac{m_1 m_2}{R^2} = m_2 \frac{v_2^2}{r_2}$$

$$\gamma \frac{m_1}{R^2} = \frac{v_2^2}{r_2},$$

missä

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T}.$$

Sijoitetaan nopeuden lauseke aiempaan yhtälöön ja ratkaistaan r_2.

$$\gamma \frac{m_1}{R^2} = \frac{\left(\frac{2\pi r_2}{T}\right)^2}{r_2} = \frac{4\pi^2 r_2^2}{r_2 T^2} = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2}$$

$$r_2 = \frac{\gamma m_1 T^2}{4\pi^2 R^2} \approx 7{,}619 \cdot 10^9 \text{ m} \approx 0{,}0509 \text{ AU}$$

$m{:=}1.989 \cdot 10^{30} \cdot$ _kg	1.989E30· _kg
$m1{:=}3.17 \cdot m$	6.30513E30· _kg
$r{:=}0.062 \cdot$ _au	9275067983.4· _m
$t{:=}2.87 \cdot$ _day	247968.· _s
$r2{:=}\frac{\_Gc \cdot m1 \cdot t^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}$	7618984808.29· _m
7618984808.2872· _m▸_au	0.050929767734· _au

Algol Aa1:n radan säde on $r_1 = R - r_2 \approx 0{,}0111 \text{ AU}$.

$r1{:=}r-r2$	1656083175.11· _m
1656083175.1127· _m▸_au	0.011070232266· _au

Osoitetaan seuraavaksi, että kaksoistähtien ratojen säteet ja massat ovat kääntäen verrannollisia.

Yhtälö $r_2 = \frac{\gamma m_1 T^2}{4\pi^2 R^2}$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{r_2}{m_1} = \frac{\gamma T^2}{4\pi^2 R^2}$$

ja tekemällä vastaavat laskut kuin edellä tähdelle Algol Aa1 huomataan, että vastaava kaava pätee tällekin tähdelle. (Kaavan oikealla puolella olevat arvot ovat samoja kummallakin tähdellä.) Siis

$$\frac{r_1}{m_2} = \frac{\gamma T^2}{4\pi^2 R^2}$$

eli

$$\frac{r_2}{m_1} = \frac{r_1}{m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

tämä todistaa sen, että kaksoistähtien ratojen säteet ovat kääntäen verrannollisia massoihin.

Verrannosta saadaan ratkaistua massa m_2:

$$m_2 = \frac{r_1 m_1}{r_2} \approx 1{,}37 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \approx 0{,}69\mathrm{M}.$$

$$m2 := \frac{r1 \cdot m1}{r2} \qquad 1.37050013521\mathrm{E}30 \cdot \_\mathrm{kg}$$

$$\frac{m2}{m} \qquad 0.689039786429$$