

Yo-tehtävä S2019/4 (TI-Nspiren ja Vernier DataQuestin avulla)

4. Vaunujen törmäyksiä (15 p.)

Törmäyksiä tutkittiin kahden herkästi vaakasuoralla kiskolla liikkuvan vaunun avulla. Vaunujen paikkoja mitattiin ultraäänianturien avulla. Vaunut törmäytettiin siten, että törmäys olisi mahdollisimman kimmainen. Tämän mittauksen data on aineistossa 4.A.

Aineisto:

4.A Mittausaineisto: Törmäys

4.1. Esitä kuvaajat vaunujen paikasta törmäyksen aikana (aineisto 4.A). Määritä vaunujen nopeudet ennen törmäystä ja törmäyksen jälkeen. (7 p.)

[Ohje kuvien ja kaavojen liittämiseen](#) ▾

Avataan mittausaineisto TI-Nspirellä (.tns-muoto):

Yo-kokeen .tns-muotoinen mittausaineisto aukeaa automaattisesti Vernier DataQuestiin. Mittausaineistoa voi tuoda myös taulukkolaskennasta tai syöttää näppäimistöltä. Lisäohjeita löytyy sivulta <https://nspire.fi/mittausdatananalysointi/>.

The screenshot shows the Vernier DataQuest™ software interface. On the left, there is a sidebar menu with the following items: 1: Koe, 2: Data, 3: Kuvaaja, 4: Analysoi, 5: Tarkastele, 6: Asetukset, and 7: Lähetä kohteeseen. The main area displays a data table with the following columns: t(s), Paikka 1 (m), and Paikka 2 (m). The table contains 28 rows of data. At the bottom of the interface, there is a navigation bar with three icons: a globe, a graph, and a list. A red circle highlights the graph icon, and a red arrow points to it from the text below.

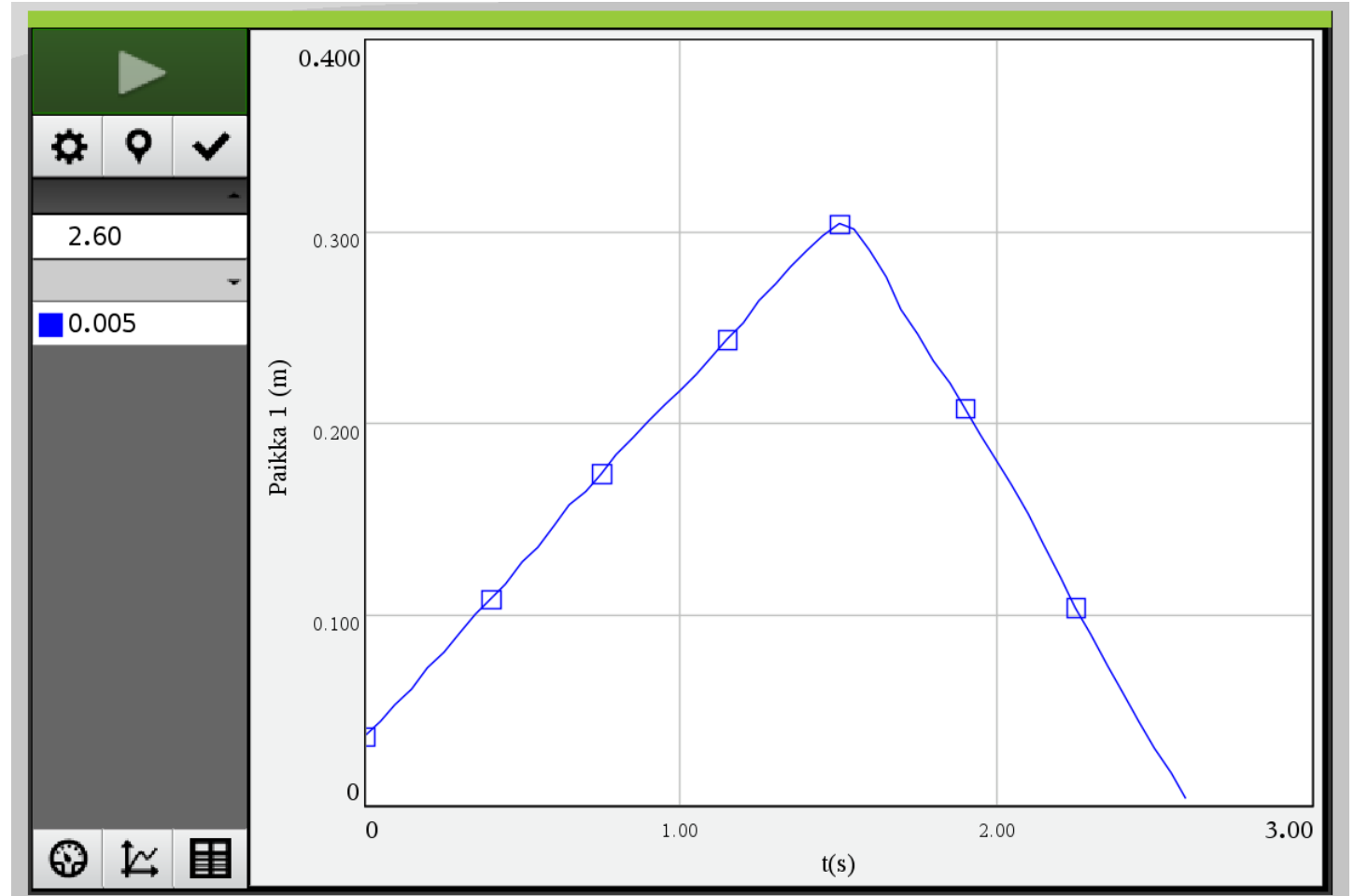
	t(s)	Paikka 1 (m)	Paikka 2 (m)
1	0	0.037	0.598
2	0.05	0.045	0.587
3	0.10	0.054	0.576
4	0.15	0.062	0.564
5	0.20	0.073	0.554
6	0.25	0.081	0.544
7	0.30	0.090	0.533
8	0.35	0.101	0.523
9	0.40	0.109	0.512
10	0.45	0.117	0.503
11	0.50	0.128	0.493
12	0.55	0.136	0.483
13	0.60	0.147	0.472
14	0.65	0.158	0.462
15	0.70	0.165	0.453
16	0.75	0.174	0.443
17	0.80	0.184	0.433
18	0.85	0.193	0.423
19	0.90	0.201	0.414
20	0.95	0.210	0.404
21	1.00	0.217	0.394
22	1.05	0.226	0.385
23	1.10	0.235	0.376
24	1.15	0.244	0.366
25	1.20	0.253	0.357
26	1.25	0.264	0.348
27	1.30	0.273	0.339
28	1.35	0.282	0.329

Valitse seuraavaksi kuvaajat.

Vaunun 1 paikka ajan suhteen:

Varmista, että akselit ovat oikein (paikka on ajan funktiona eli aika vaaka-akselille). Akselien otsikoita klikkaamalla voi suureita vaihtaa tarvittaessa.

Huomaa, että ohjelma sovittaa mittausdataan automaattisesti kuvaajan, joka kulkee mittauspisteiden kautta. Tehtävässä halutaan kuitenkin mallintaa vaunujen liikettä tasaisen liikkeen mallilla ennen törmäystä ja törmäyksen jälkeen.



Sovitetaan siis suorat niihin osiin kuvaajaa, joissa liike on (likimain) tasaista (ja suoraviivaista). Maalaa hiirellä tätä varsin ensin kyseinen alue. Huomaa, että aivan käyrän huipussa vaunut ovat jo kosketuksissa, joten jätetään se valinnan ulkopuolelle.

Valitse sitten hiiren oikealla näppäimellä "Analysoi", "Käyränsovitus" ja "Lineaarinen" (koska halutaan sovittaa suora).

Sovitetun suoran kulmakerroin (m) on nyt vaunun 1 nopeus (v_1) ennen törmäystä.

■ 0.298

Sovita: Line...

Arvo: 0.300

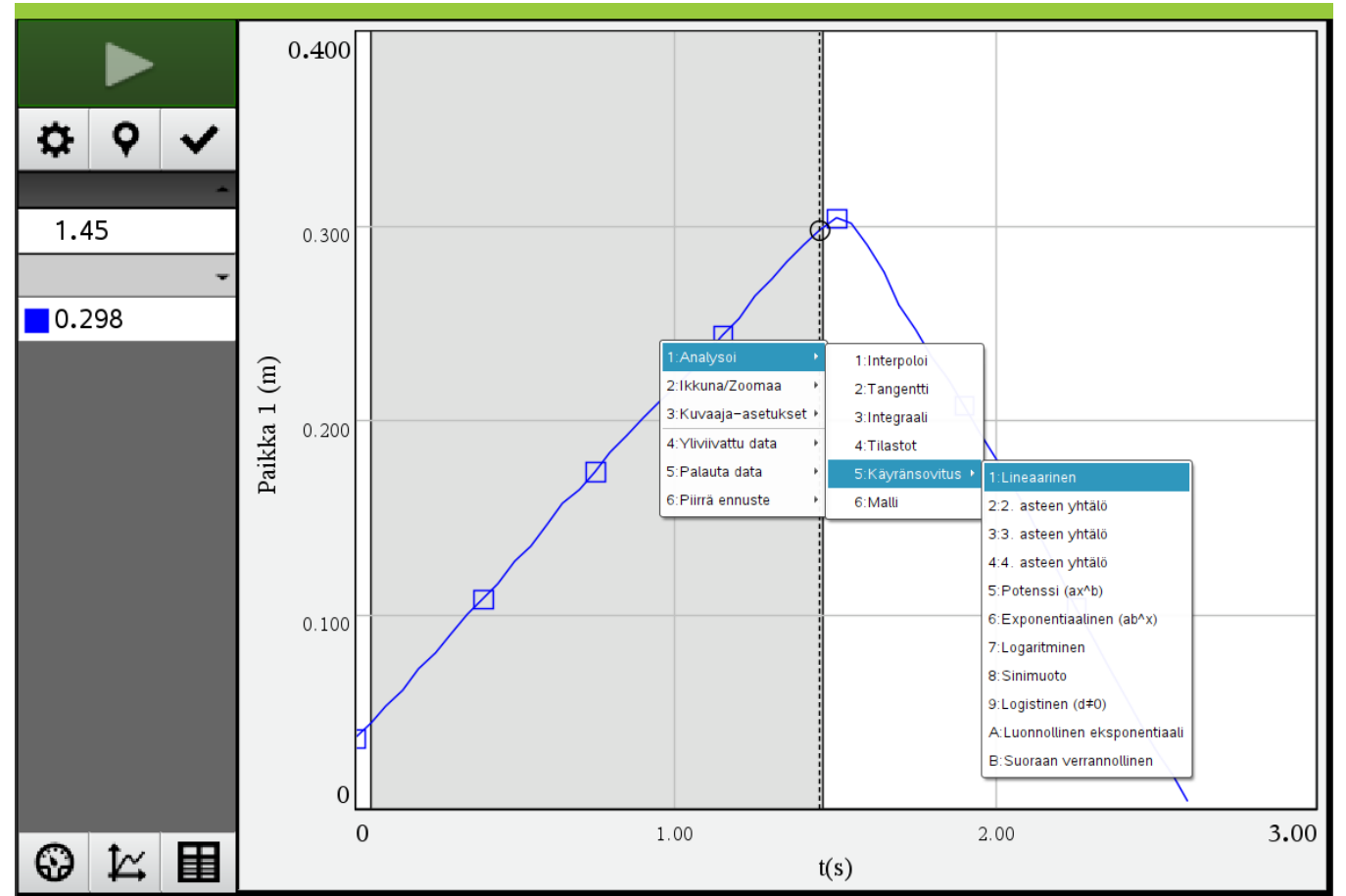
$mx + b$

m: 0.181

b: 0.037

r: 1.00

r^2 : 1.00



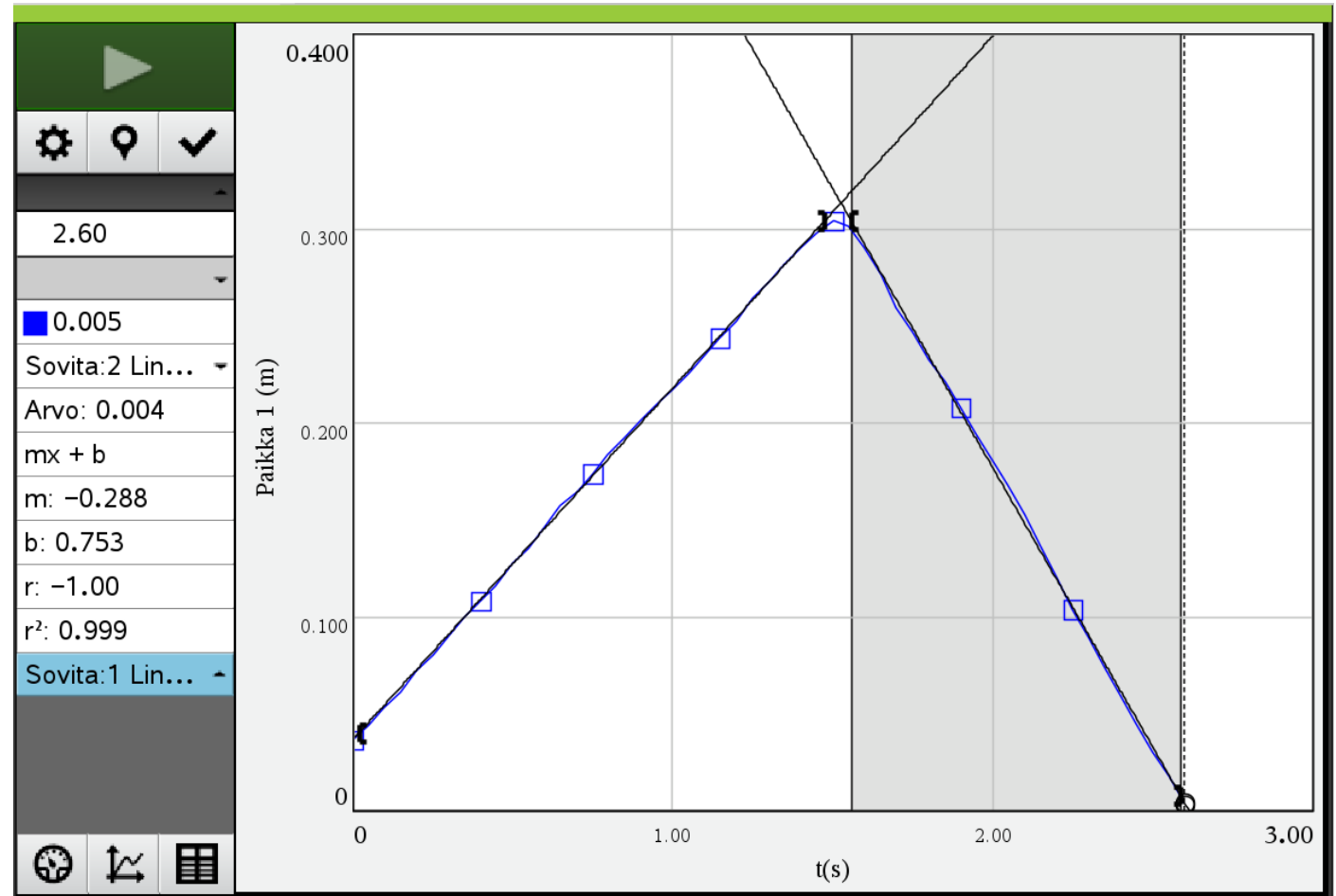
Avataan uusi asiakirja (välilehti) laskinta varten ja tallennetaan muuttuja $v_1 \approx 0,181 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(Päättele yksikkö akselien yksiköistä. Lukuarvo voi hieman vaihdella riippuen alueen valinnasta.)

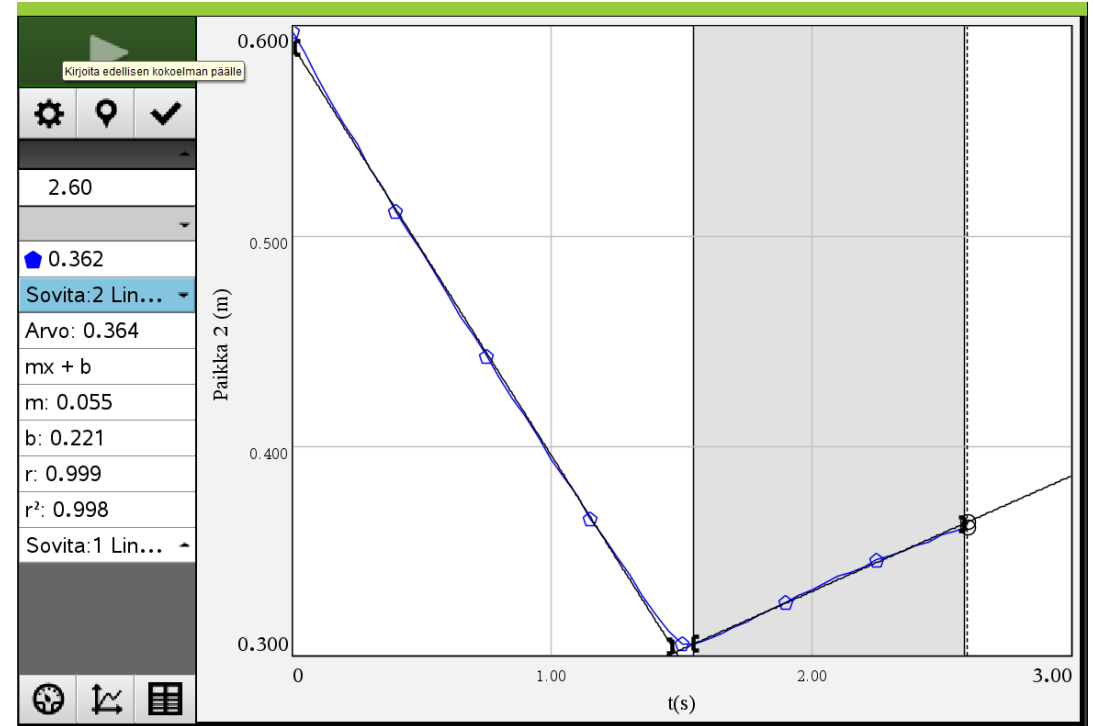
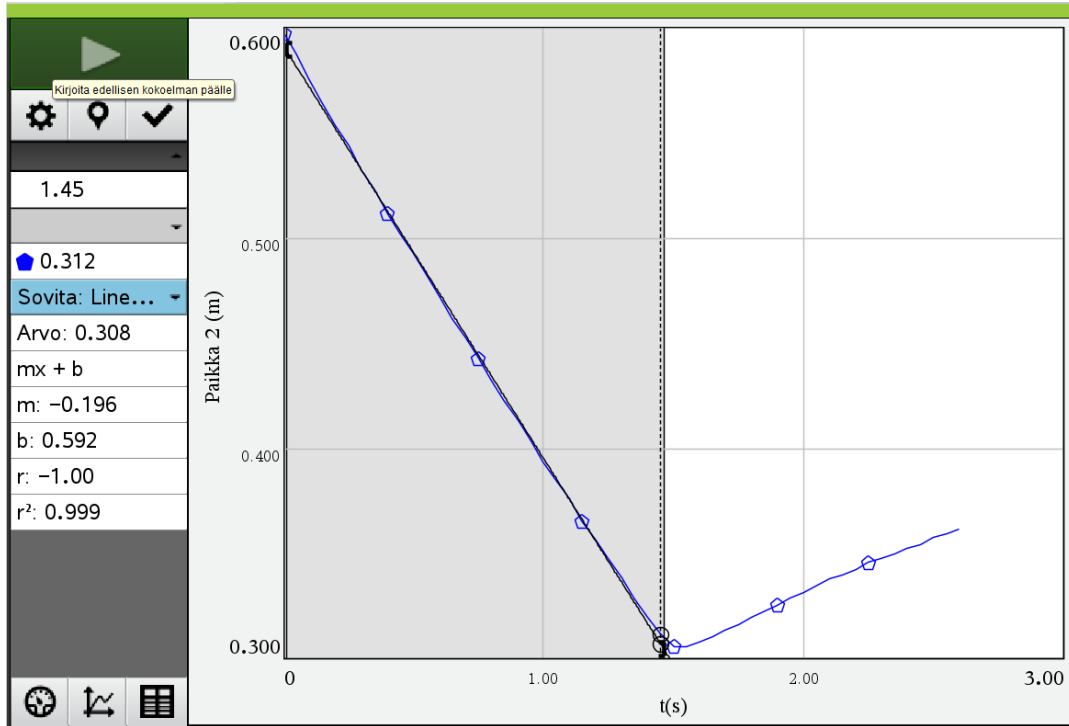
Määritetään vastaavalla tavalla vaunun 1 nopeus (u_1) törmäyksen jälkeen.

Sovituksen mukaan $u_1 \approx -0,288 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Etumerkki on negatiivinen, kun positiivinen suunta on vaunun 1 alkuperäinen kulkusuunta.



Tallennetaan muuttuja laskimeen ja määritetään vielä vaunun 2 nopeudet vaihtamalla ensin pystyakselille mittausdata "Paikka 2 (m)".



Vaunun 2 nopeus ennen törmäystä on $v_2 \approx -0,196 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja törmäyksen jälkeen $u_2 \approx 0,055 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Yhteenvetona:

$$v_1 \approx 0,181 \frac{\text{m}}{\text{s}}, u_1 \approx -0,288 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 \approx -0,196 \frac{\text{m}}{\text{s}}, u_2 \approx 0,055 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Vaunun 1 alkuperäinen liikesuunta on positiivinen.)

4.2. Laadi ennuste siitä, miten vaunujen yhteenlaskettu liikemäärä ja yhteenlaskettu liike-energia muuttuisivat (täysin) kimmoisassa törmäyksessä. Vertaa ennustetta mitattuun törmäykseen (aineisto 4.A). Vaunun 1 massa on 606 g ja vaunun 2 massa on 1126 g. (8 p.)

Täysin kimmoisassa törmäyksessä sekä vaunujen yhteenlasketun liikemäärän, että niiden yhteenlasketun liike-energian pitäisi säilyä.

Liikemäärän säilymisen mukaan

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Tallennetaan myös massat laskimeen ja lasketaan kokonaisliikemäärät alussa (p_a) sekä lopussa (p_l).

$$v1 := \frac{0.181 \cdot \text{_m}}{\text{_s}} \quad 0.181 \cdot \frac{\text{_m}}{\text{_s}}$$

$$u1 := \frac{-0.288 \cdot \text{_m}}{\text{_s}} \quad -0.288 \cdot \frac{\text{_m}}{\text{_s}}$$

$$v2 := \frac{-0.196 \cdot \text{_m}}{\text{_s}} \quad -0.196 \cdot \frac{\text{_m}}{\text{_s}}$$

$$u2 := \frac{0.055 \cdot \text{_m}}{\text{_s}} \quad 0.055 \cdot \frac{\text{_m}}{\text{_s}}$$

$$m1 := 606 \cdot \text{_gm} \quad 0.606 \cdot \text{_kg}$$

$$m2 := 1126 \cdot \text{_gm} \quad 1.126 \cdot \text{_kg}$$

$$p_a := m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2$$

$$-0.111101 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$p_l := m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$

$$-0.112598 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Liikemäärän (absoluuttinen) muutos on $p_l - p_a \approx -0,0016 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.

Suhteellinen muutos on

$$\frac{p_l - p_a}{p_a} \cdot 100\% \approx 1,4 \%$$

$$p_l - p_a$$

$$-0.001588 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{p_l - p_a}{p_a} \cdot 100$$

$$1.430501757$$

Liikemäärän säilymisen osalta ennuste pitää siis varsin hyvin paikkansa.

Jos törmäys on täysin kimmoinen, niin systeemin kokonaisliike-energian pitäisi myös säilyä.

Siis

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2.$$

Olkoon alkutilanteen kokonaisliike-energia E_{ka} (kaavan vasen puoli) ja lopputilanteen E_{kl} (kaavan oikea puoli). Laskimella saadaan

$$E_{ka} \approx 0,0316 \text{ J ja } E_{kl} \approx 0,0268 \text{ J.}$$

Liike-energian muutos on $E_{kl} - E_{ka} \approx -0,0047 \text{ J}$ eli liike-energiaa siirtyy systeemistä pois (muihin energiamuotoihin) 4,7 mJ verran.

Suhteellinen muutos on $\frac{E_{kl} - E_{ka}}{E_{ka}} \cdot 100\% \approx -15 \%$.

Liike-energia ei siis säily ja ennuste ei siltä osin pidä paikkaansa. Törmäys ei ole täysin kimmoinen.

$$eka := \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1^2 + \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2^2$$

0.031554791 · _J

$$ekl := \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot u1^2 + \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot u2^2$$

0.026835107 · _J

$$ekl - eka$$

-0.004719684 · _J

$$\frac{ekl - eka}{eka} \cdot 100$$

-14.95710746