

FY3 näytetehtävien ratkaisut

1. a) Syvyys $h = 11\,034\text{ m}$, tiheys $\rho = 1\,027 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, normaali ilmanpaine $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$

Kokonaispaine (ilmanpaine + hydrostaattinen paine):

$$p = p_0 + \rho gh = 101\,325\text{ Pa} + 1\,027 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 11\,034\text{ m} \approx 111\,267\,441\text{ Pa} \approx 111\text{ MPa}$$

$$p_0 = 1 \cdot \text{atm} \quad 101325 \cdot \text{Pa}$$

$$\rho = \frac{1027 \cdot \text{kg}}{\text{m}^3} \quad 1027 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$h = 11034 \cdot \text{m} \quad 11034 \cdot \text{m}$$

$$p_0 + \rho \cdot g \cdot h \quad 1.11229 \text{E}8 \cdot \text{Pa}$$

b) Arvioidaan maastoauton massaksi $m = 2\,000\text{ kg}$ ja varpaan pinta-alaksi $A = 4\text{ cm}^2 = 0,0004\text{ m}^2$

Autojen painon G aiheuttama paine:

$$p = \frac{G}{A} = \frac{3mg}{A} = \frac{3 \cdot 2\,000\text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,0004\text{ m}^2} \approx 147\,150\,000\text{ Pa} \approx 147\text{ MPa}$$

$$m = 2000 \cdot \text{kg} \quad 2000 \cdot \text{kg}$$

$$a = 4 \cdot \text{cm}^2 \quad 0.0004 \cdot \text{m}^2$$

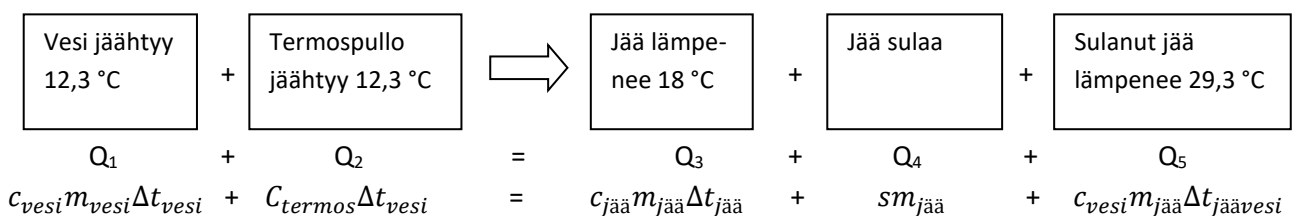
$$\frac{3 \cdot m \cdot g}{a} \quad 1.471 \text{E}8 \cdot \text{Pa}$$

Paineet ovat samaa suuruusluokkaa, joten väite pitää likimain paikkansa.

2. Termosastian ja veden luovuttama lämpö on yhtä suuri kuin jään vastaanottama lämpö. Lämpöä tarvitaan jään lämmittämiseen, jään sulattamiseen ja sulaneen jään lämmittämiseen.

Kuvaajan perusteella veden lämpötila juuri ennen jään lisäämistä oli n. $41,6\text{ °C}$ (20 sekunnin kohdalla) ja jään sullettua n. $29,3\text{ °C}$ (65 sekunnin kohdalla). Siis veden ja termospullon lämpötila laski $12,3\text{ °C}$.

Piirretään kaavio lämpöenergian siirtymisestä:



Lasketaan lämpömäärät välituloksina:

$$Q_1 = c_{vesi} m_{vesi} \Delta t_{vesi} = 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{°C}} \cdot 0,156\text{ kg} \cdot 12,3\text{ °C} \approx 8,040\text{ kJ}$$

$$Q_2 = C_{termos} \Delta t_{vesi} = 0,20 \frac{\text{kJ}}{\text{°C}} \cdot 12,3\text{ °C} = 2,46\text{ kJ}$$

$$Q_3 = c_{jää} m_{jää} \Delta t_{jää} = 2,09 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{°C}} \cdot 0,021\text{ kg} \cdot 18\text{ °C} \approx 0,790\text{ kJ}$$

$$Q_5 = c_{vesi} m_{jää} \Delta t_{jäävesi} = 4,19 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \cdot 0,021 \text{ kg} \cdot 29,3^\circ\text{C} \approx 2,578 \text{ kJ}$$

Siis $Q_4 = Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_5 = 8,040 \text{ kJ} + 2,46 \text{ kJ} - 0,790 \text{ kJ} - 2,578 \text{ kJ} = 7,132 \text{ kJ}$, josta saadaan ominaissulamislämmöksi

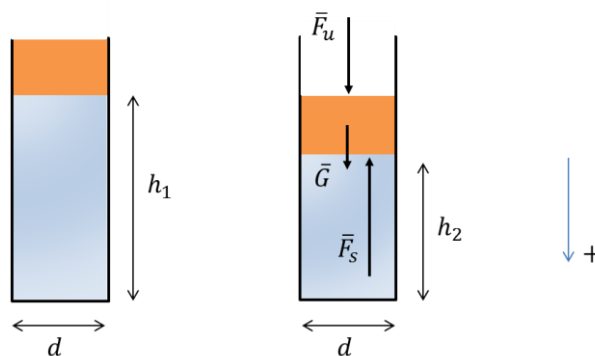
$$s = \frac{Q_4}{m_{jää}} = \frac{7,132 \text{ kJ}}{0,021 \text{ kg}} \approx 339,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \approx 340 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Tulos vastaa varsin hyvin taulukkoarvoa 333 kJ/kg. Pieni poikkeama voi selittyä termosastian lämpövuodoilla ja kuvaajan epätarkkuudella.

3. a)

Kun sylinteri on alhaalla tasapainossa, vaikuttaa siihen paino G , sisäiseen paineeseen liittyvä voima F_s ja ulkoa päin paineeseen liittyvä voima F_u . Paineen määritelmän mukaan

$$p = \frac{F}{A} \Leftrightarrow F = pA$$



Kun mäntä on painunut alas, niin se pysyy paikallaan ja voimien summa on nolla:

$$\vec{G} + \vec{F}_s + \vec{F}_u = \vec{0}$$

$$G - F_s + F_u = 0$$

Paine p_1 on paine sylinterin ulkopuolella ja paine p_2 on paine sylinterin sisällä.

$$mg - p_2 A + p_1 A = 0$$

Sylinterin sisältämän kaasun tilanmuutos voidaan olettaa isotermiseksi, joten se noudattaa Boylen lakia

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Ratkaistaan laskinohjelmalla $V_1 = Ah_1 = \pi r^2 h_1 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h_1$ ja yhtälöparista säiliön tilavuus V_2 ja paine p_2 lopputilanteessa.

$$m := 3 \cdot \text{kg} \quad 3 \cdot \text{kg}$$

$$a := \pi \cdot \left(\frac{9 \cdot \text{cm}}{2}\right)^2 \quad 0.006362 \cdot \text{m}^2$$

$$p1 := 1 \cdot \text{atm} \quad 101325 \cdot \text{Pa}$$

$$v1 := a \cdot 35 \cdot \text{cm} \quad 0.002227 \cdot \text{m}^3$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} m \cdot g - p_2 \cdot a + p_1 \cdot a = 0 \\ p_1 \cdot v1 = p_2 \cdot v2 \end{cases}, p_2, v_2\right) \quad p_2 = 105950 \cdot \text{Pa} \text{ and } v_2 = 0.002129 \cdot \text{m}^3$$

Tulokseksi saadaan $p_2 \approx 105\,950\text{ Pa}$ ja $V_2 \approx 0,002129\text{ m}^3$.

Sylinterin uudesta tilavuudesta $V_2 = Ah_2$ saadaan uudeksi korkeudeksi $h_2 \approx 33,5\text{ cm}$. Mäntä on siis laskenut n. 1,5 cm.

$$\frac{0.002129 \cdot \text{m}^3}{a} \qquad 0.334658 \cdot \text{m}$$

$$35 \cdot \text{cm} - 0.33465765317793 \cdot \text{m} \qquad 0.015342 \cdot \text{m}$$

b)

Lämmitettäessä sylinteriä tapahtuu siinä olevalle ilmalle isobaarinen tilanmuutos. Paine pysyy samana kuin sylinterin ollessa alhaalla, mutta tilavuus kasvaa alkuperäiseen. Voidaan siis soveltaa kaavaa $\frac{V}{T} = \text{vakio}$.

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$$

missä $V_3 = V_1$ ja $T_2 = 20\text{ °C} = 293,15\text{ K}$. Tulokseksi saadaan $T_3 \approx 33\text{ °C}$.

$$v2:=0.002129 \cdot \text{m}^3 \qquad 0.002129 \cdot \text{m}^3$$

$$t2:=293.15 \cdot \text{°K} \qquad 293.15 \cdot \text{°K}$$

$$\text{solve}\left(\frac{v2}{t2} = \frac{v1}{t3}, t3\right) \qquad t3=306.589 \cdot \text{°K}$$

$$306.589 \cdot \text{°K} \blacktriangleright \text{°C} \qquad 33.439 \cdot \text{°C}$$