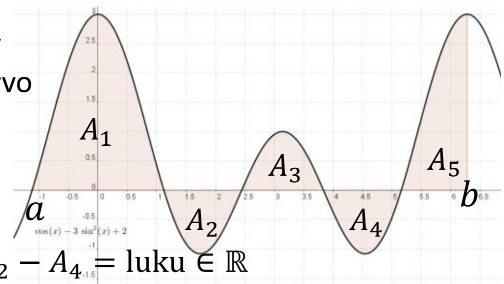
Analyysin peruslause

INTEGRAALI-
LASKENTA, MAA9

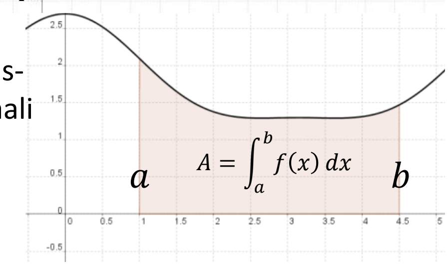
Kertausta

Tähän mennessä opittua: määräämätön integraali, ”integroiminen”, eli etsitään funktiota F, jolle $F' = f$ (käänteistoimenpide derivoimiselle).



Toisaalta on opittu, että määrätty integraali tietyllä välillä on raja-arvo porrassummista, jotka lähestyvät reaalilukua, joka voidaan tulkita pinta-alojen erotuksena.

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 + A_3 + A_5 - A_2 - A_4 = \text{luku} \in \mathbb{R}$$



Lisäksi, jos f on ei –negatiivinen tarkasteluvälillä $[a, b]$, niin määrätty integraali vastaa pinta-alaa, joka jää käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin väliin.

Olkoon f jatkuva ja $a \in \mathbb{R}$ vakio. Tarkastellaan funktion f määrättyä integraalia ylärajansa funktiona eli funktiota

$$K_a;\ \ K_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Funktiota K_a sanotaan f:n kertymäfunktioksi (tässä integroimismuuttuja on t, koska x tarkoittaa ylärajaa).

Määritelmä, *kertymäfunktio*:

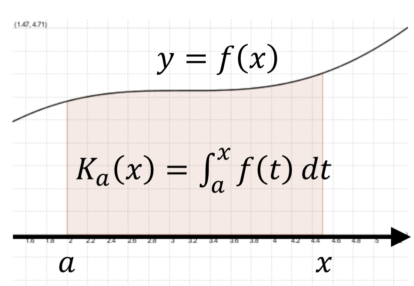
Jatkuvan funktion f kertymäfunktio (kohdasta $a \in \mathbb{R}$ alkaen) on

$K_a;\ \ K_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (x > a).$

Jos f on ei-negatiivinen, niin luku $K_a(x)$ Ilmoittaa sen pinta-alan, joka ”kertyy” käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin väliin kohdasta a alkaen kohtaan x asti.

Lisäksi määritellään

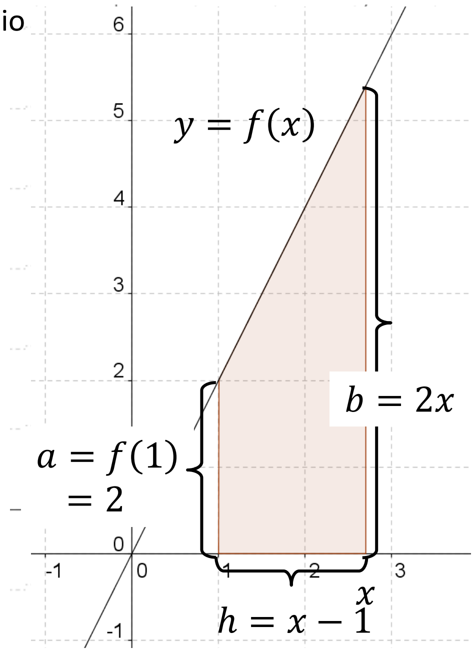
$K_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0.$



Esimerkki: Olkoon $f: f(x) = 2x$. Määritä, määrätyn integraalin pinta-alatulkintaa käyttäen, kertymäfunktio

a) $K_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ (x \geq 0)$

b) $K_1(x) = \int_1^x f(t)\,dt,\ (x \geq 1)$



a) Varjostetun kolmion pinta-ala on

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{x}_{\text{kanta}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{korkeus}} = x^2$$

Esim. jos $x = 2$, niin $K_0(2) = 4$

b) Varjostetun puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$K_1(x) = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2+2x}{2} \cdot (x-1)$$

$$= (x+1)(x-1) = x^2 - 1$$

Derivoidaan (huvikseen, eli ilman mitään merkittävää syytä) molemmat esimerkin kertymäfunktiot, saadaan

$$K_0'(x) = 2x$$
$$K_1'(x) = 2x$$

eli ovat samat.

Lisäksi havaitaan, että derivaatat = integroitava funktio $f(t) = 2t$. Toisin sanoen, kertymäfunktiot $K_0(x)$ ja $K_1(x)$ ovat määritelmän nojalla funktion f integraalifunktioita, jotka toteuttavat alkuehdot

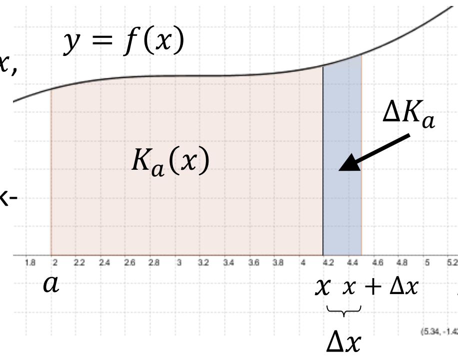
$$K_0(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0 \qquad \text{ja} \qquad K_1(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0.$$

Tästä herää tietysti mielenkiinto tutkia yleisesti kertymäfunktion

$$K_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

derivaattaa, kun f on ei-negatiivinen ja jatkuva funktio.

Derivaattaa varten muodostetaan erotusosamäärä kohdassa $x > a$ (ja lisäksi $x < b$).



Muuttujalle x annetaan lisäys Δx, jolloin pinta-alan lisäys on

$$\Delta K_a = K_a(x + \Delta x) - K_a(x)$$

Kun $\Delta x \to 0$, niin pinta-alan lisäykselle ΔK_a saadaan

$$\Delta K_a \to \underbrace{f(x)}_{\text{korkeus}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{kanta}},$$

ja arvio $\Delta K_a \approx f(x)\Delta x$ on f:n jatkuvuuden nojalla sitä tarkempi, mitä pienempi Δx on.
Näin ollen funktion K_a erotusosamäärä on

$$\frac{\Delta K_a}{\Delta x} = \frac{K_a(x + \Delta x) - K_a(x)}{\Delta x} \approx \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

sitä tarkemmin mitä pienempi Δx on.

Vastaava tulos pätee, jos Δx on negatiivinen. Antamalla nyt $\Delta x \to 0$, saadaan kertymäfunktion K_a derivaatta kohdassa x:

$$K_a'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K_a}{\Delta x} = f(x).$$

Tämä tulos voidaan johtaa analyyttisesti, kurssi 13 ja samalla voidaan luopua funktion f ei-negatiivisuudesta. Näin ollen vain f:n jatkuvuus välillä $[a, b]$ on oleellista.

Lause, *kertymäfunktion derivaatta*:
Jatkuvan funktion f kertymäfunktiolle $K_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ pätee

$$K_a'(x) = f(x),$$

eli K_a on funktion f integ.funk., joka toteuttaa alkuehdon $K_a(a) = 0$.

GRANDE FINALE!
Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio ja F jokin sen integraalifunktio. Myös kertymäfunktio $K_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ on funktion f integraalifunktio, joten

$$K_a(x) = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

MUISTA: Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F + C$.

Alkuehdosta $K_a(a) = 0$ saadaan

$$K_a(a) = F(a) + C = 0$$

eli $C = -F(a)$, siis

$$K_a(x) = F(x) - F(a).$$

Valitaan kohta $x = b$, jolloin

$$K_a(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \text{luku} \in \mathbb{R}.$$

Määrätyn integraalin $\int_a^b f(t)dt$ arvo saadaan siis muodostamalla f:n mikä tahansa integraalifunktio F ja laskemalla sitten erotus integraalifunktion arvoista päätekohdissa b ja a, eli $F(b) - F(a)$.
Tätä merkitään

$$\underset{a}{\overset{b}{/}}F(x) = F(b) - F(a).$$

Merkintä $\underset{a}{\overset{b}{/}}F(x)$ luetaan: ”sijoitus a:sta b:hen F x”.

Kun vielä integroimismuuttujaa merkitään t:n sijasta x:llä, niin saadaan määrätyn integraalin ja määräämättömän integraalin eli integraalifunktion välinen yhteys ja lukiomatematiikan yksi tärkeimmistä (ellei peräti tärkein) matematiikan yhtälö/kaava

Lause, *Analyysin peruslause eli määrätyn integraalin ja integraalifunktion F välinen yhteys*:
Jos F on jatkuvan funktion f jokin integraalifunktio välillä $[a, b]$, niin tällöin

$$\int_a^b f(x)dx = \underset{a}{\overset{b}{/}}F(x) = F(b) - F(a).$$

Integraalifunktioksi F kannattaa valita se, jossa $C = 0$.

Enää ei siis tarvitse laskea porrassummia ja tehdä rajankäyntiä määrätyn integraalin laskemisessa. Riittää, kun löytyy jokin integraalifunktio, jonka arvot välin päätepisteissä osataan laskea.

Vastaava tulos pätee, jos Δx on negatiivinen. Antamalla nyt $\Delta x \to 0$, saadaan kertymäfunktion K_a derivaatta kohdassa x:

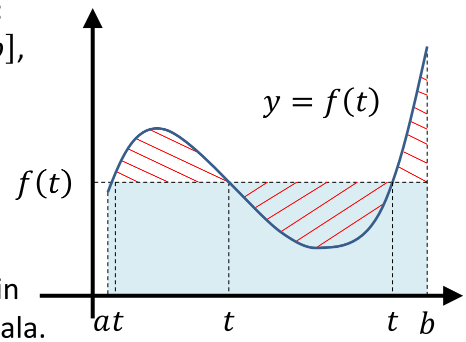
$$K_a'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K_a}{\Delta x} = f(x).$$

Katsotaan tätä tulosta analyyttisesti, ilman geometrista pinta-ala-tulkintaa. Tarvitaan tulos (tehtävä 138, sivu 143):

Integraalilaskennan väliarvolause:
Jos funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin tällä välillä on ainakin yksi sellainen luku t, että

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(t)(b-a)$$

Eli käyrän alle jäävä (kun f on ei-negatiivinen) pinta-ala on sama kuin suorakulmion $f(t) \cdot (b-a)$ pinta-ala.



Oikean puolen kuvan esimerkissä kolme eri t:tä löytyi.

Derivoidaan kertymäfunktio K_a määritelmästä (erotusosamäärän raja-arvo) käsin. Mitä on derivaatan arvo $K_a'(x)$ kohdassa x:

$$K_a'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K_a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K_a(x+\Delta x) - K_a(x)}{(x+\Delta x) - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{(x+\Delta x) - x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{(x+\Delta x) - x}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\big((x+\Delta x) - x\big)}{(x+\Delta x) - x}$$

$$= \lim_{c \to x} f(c)$$

$$= f(x)$$

Kohdassa * on käytetty integraalilaskennan väli-Arvolausetta jollekin arvolle $x < c < x + \Delta x$.

$c \to x$ koska $\Delta x \to 0$