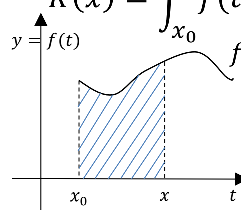
Integraalilaskenta

Määräämätön
- Etsitään funktiota
- Derivoinnille käänteistoimen-pide → ”integroiminen”
- Integraalifunktio $F(x)$, jolle
$$F'(x) = f(x),$$
lisäksi integraalifunktioille
$$G(x) = F(x) + C.$$
- Vakion C lisäys (merkitys), kun
$$G(x) = F(x) + C$$
niin
$$G'(x) = F'(x)$$

Määrätty
- Etsitään reaalilukua
- Pinta-alan/tilavuuden ratkaise-minen tai määrittäminen
- Välin jako ja porrasfunktiot → arviointi ja rajankäynti, jolloin
$$\sum \rightarrow \int \quad , \qquad \Delta x \rightarrow dx$$
- Kertymäfunktion määritelmä
$$K(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$



Kertynyt pinta-ala vastaa funktion K arvoa, tässä viivoi-tettu pinta-ala on funktion K arvo $K(x)$ muuttujan t arvolla x.

Havainto: $K(x)$ on eräs f:n Integraalifunktio, eli…

Määrätty integraali

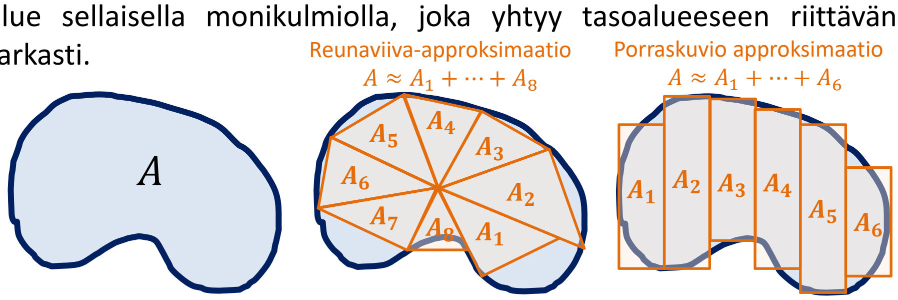
INTEGRAALI-LASKENTA, MAA9

Johdantoa

Määrätty integraali eli määritetään/lasketaan (pinta-aloja, tilavuuksia, jne.) → saadaan jokin reaaliluku. Muista ero määräämättömään integraaliin.

Määritelmän takana on rajankäynti, aivan kuten derivaatan määri-telmässä ”erotusosamäärän raja-arvo”.

Yleisen tasoalueen reuna voi sisältää käyräviivaisia osia. Tällaisen alueen pinta-alalle saadaan likiarvo eli approksimaatio korvaamalla alue sellaisella monikulmiolla, joka yhtyy tasoalueeseen riittävän tarkasti.



Määritellään yleisen tasoalueen pinta-ala sellaisten monikulmioiden alojen raja-arvona, jotka yhtyvät yhä tarkemmin kyseiseen alueeseen.

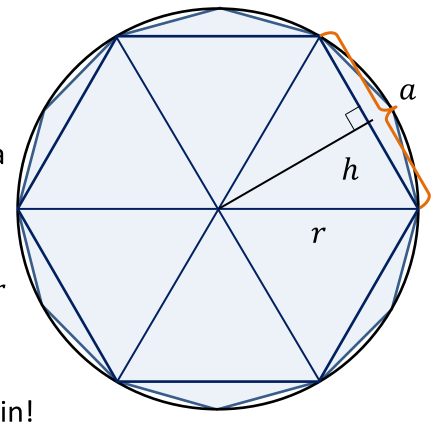
Esimerkki Ympyrän (säde$= r$) pinta-ala $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, missä A_n on ympyrän sisään piirretyn säännöllisen n-kulmion pinta-ala.
Koska

$$A_n = n \cdot \frac{ah}{2} = \frac{1}{2}hna = \frac{1}{2}hp_n,$$

missä a ja h ovat keskuskolmion kanta ja korkeus sekä p_n on n-kulmion piiri, niin

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}hp_n = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r$$
$$= \pi r^2$$

Säännöllinen 12-kulmio peittää jo hyvin!



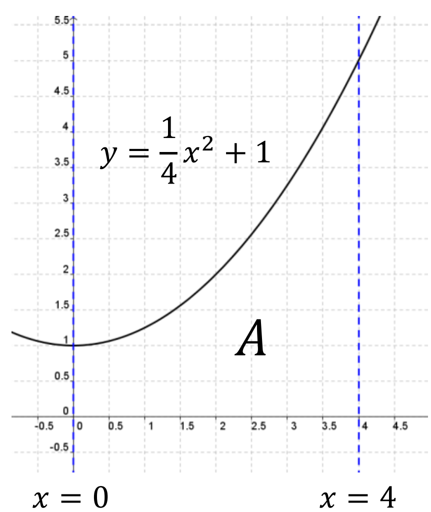
$n = 6$

Pinta-ala porrassumman raja-arvona

Esimerkki
Tarkastellaan aluetta, jota rajoittaa paraabeli $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, x-akseli ja suorat $x = 0, x = 4$.

Lasketaan alueen A pinta-alalle likiarvoja hyödyntäen ns. *porrassummia*.

Jaetaan väli $[0,4]$ neljään yhtä suureen osaväliin, joiden jokaisen pituus on $\Delta x = 1$.



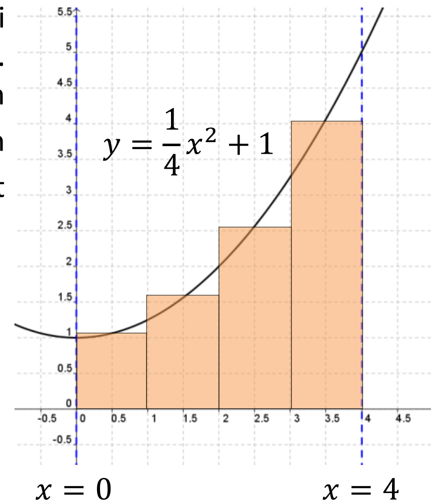
Muodostetaan suorakulmioiden eli ”portaiden” avulla monikulmio. Suorakulmion korkeus on funktion arvo $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ osavälin keskipisteessä x_k. Keskipisteet ovat $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = \frac{7}{2}$, jolloin

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1 = \frac{41}{16}$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1 = \frac{65}{16}$$

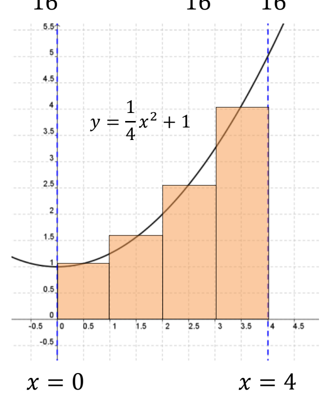


Taulukoidaan saadut tiedot:

Osaväli	Keskipiste x_k	Osavälin pituus Δx	Funktion arvo $f(x_k)$	Suorakulmion ala $f(x_k) \cdot \Delta x$
$0 \leq x \leq 1$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{17}{16}$	$\frac{17}{16} = 1\frac{1}{16}$
$1 \leq x \leq 2$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{25}{16}$	$\frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$
$2 \leq x \leq 3$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{41}{16}$	$\frac{41}{16} = 2\frac{9}{16}$
$3 \leq x \leq 4$	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{65}{16}$	$\frac{65}{16} = 4\frac{1}{16}$

Suorakulmioiden=portaiden alojen $f(x_k)\Delta x$ summa eli funktion f porrassumma yli välin $[0,4]$ antaa likiarvon pinta-alalle A:

$$A \approx 1\frac{1}{16} + 1\frac{9}{16} + 2\frac{9}{16} + 4\frac{1}{16} = 9{,}25$$



Kuten derivaatan määritelmässä annetaan sekanttien lähestyä tangenttia, niin nyt tihennetään välin jakoa, jolloin osavälit Δx kapenevat ja likiarvo pinta-alalle A tarkentuu. (Tämä on rajankäyntiä!)

Osavälejä	Osavälin pituus Δx	Porrassumma eli arvio pinta-alalle
4	$\frac{4}{4} = 1$	9,2500
10	$\frac{4}{10} = 0{,}4$	9,3200
100	0,04	9,3320
1000	0,004	9,3333
10000	0,0004	9,3333

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum A_{\text{porras}}$$

Näyttäisi siltä, että kysytyn pinta-alan A arvo olisi $9\frac{1}{3}$.

Määritelmä, *porrassumma*:

Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty funktio ja olkoon D tämän välin jako n yhtäsuureen osaan, jolloin yhden jakovälin pituus on

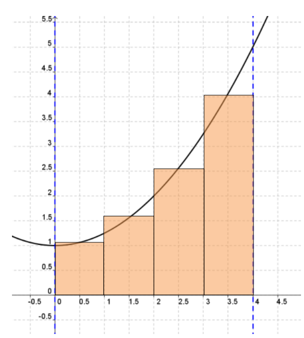
$$\Delta x = \frac{b - a}{n}.$$

Jakoon D liittyvä *porrassumma, ns. Riemannin summa* on

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots + f(x_n)\Delta x,$$

missä x_1 on valittu ensimmäiseltä, x_2 toiselta jne. ja x_n viimeiseltä jakoväliltä. *Kohtien $x_1, \dots, x_n$ ei tarvitse olla jakovälien keskikohtia!*

Jos f on ***ei-negatiivinen***, niin porrassumma ilmoittaa suorakulmioista (kanta Δx, korkeudet $f(x_i), i = 1,2, \dots$) koostuvan monikulmion pinta-alan



Määritelmä, *pinta-ala porrassummien raja-arvona*:

Olkoon funktio f jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $[a, b]$. Tällöin sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y = f(x)$, x-akseli ja suorat $x = a, x = b$, saadaan porrassummien raja-arvona, kun jakoa tihennetään rajattomasti, eli kun jakovälin pituus Δx lähenee nollaa.

→ Geogebra http://www.cs.helsinki.fi/u/kairema/GeoGebra/harjoitus18a.html
→ Geogebra http://www.geogebra.org/search/perform/search/m%C3%A4%C3%A4r%C3%A4tty%20integraali/materials/
→ Wolfram: http://integrals.wolfram.com/index.jsp

Määritelmä, *ala- ja yläsumma*:
Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio, ja olkoon D välin $[a, b]$ jako n yhtä suureen osaan. Olkoot $m_1, m_2, \dots, m_n$ funktion f pienimmät arvot ja $M_1, M_2, \dots, M_n$ funktion f suurimmat arvot jakoväleillä. Tällöin jakoon D liittyvä *alasumma* on

$$s_n = m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ \dots + m_n\Delta x$$

ja *yläsumma*

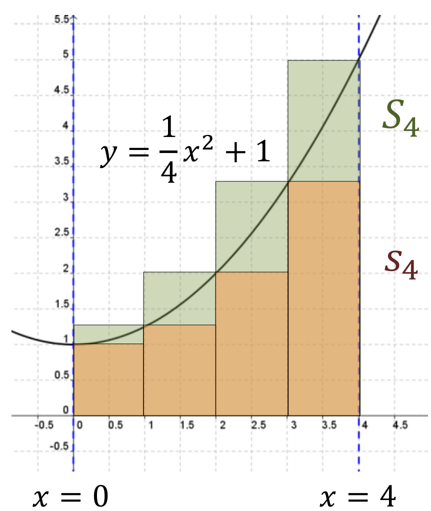
$$S_n = M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ \dots + M_n\Delta x.$$

Jos lisäksi f on ei-negatiivinen ja A on sen alueen pinta-ala, jota rajoittavat käyrä $y = f(x)$, x-akseli ja suorat $x = a$ ja $x = b$, niin pätee

$$s_n \le A \le S_n$$

Likiarvon $A \approx \frac{1}{2}(s_n + S_n)$ virhe (virheen itseisarvo) on tällöin enintään $\frac{1}{2}(S_n - s_n)$.

Esimerkki
Tarkastellaan edellistä esimerkkiä. Koska funktio $f: f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$, on positiivinen ja kasvava välillä $[0,4]$, niin se saa pienimmän arvonsa jakovälin alkupisteessä ja suurimman arvon loppupisteessä.



Kun väli $[0,4]$ jaetaan neljään yhtä suureen osaan, vastaavat ala- ja yläsummat ovat :

$$s_4 = 1 \cdot 1 + \tfrac{5}{4} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \tfrac{13}{4} \cdot 1 = 7\tfrac{1}{2}$$

$$S_4 = \tfrac{5}{4} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \tfrac{13}{4} \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 11\tfrac{1}{2}$$

Joten pinta-alalle, virheelle ja tulokselle saadaan

$$A \approx \frac{1}{2}\left(7\tfrac{1}{2} + 11\tfrac{1}{2}\right) = 9{,}5 \ , \qquad \delta A = \frac{1}{2}\left(11\tfrac{1}{2} - 7\tfrac{1}{2}\right) = 2{,}0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 9{,}5 \pm 2{,}0$$

Alla olevaan taulukkoon on laskettu tiheneviä jakoja vastaavia ala- ja yläsummia, niiden keskiarvoina saadut likiarvot alalle A sekä näiden likiarvojen maksimivirheet

Jako-välejä n	Alasumma s_n	Yläsumma S_n	A:n likiarvo $\frac{1}{2}(s_n + S_n)$	A:n virhe $\frac{1}{2}(S_n - s_n)$	Arvio A:lle
4	7,5	11,5	9,5	2,0	$A \approx 9{,}5 \pm 2{,}0$
10	8,56	10,16	9,4	0,8	$A \approx 9{,}4 \pm 0{,}8$
100	9,254	9,414	9,33	0,08	$A \approx 9{,}33 \pm 0{,}08$
1000	9,3253	9,3413	9,333	0,008	$A \approx 9{,}333 \pm 0{,}008$
10000	9,3325	9,3341	9,3333	0,0008	$A \approx 9{,}3333 \pm 0{,}0008$

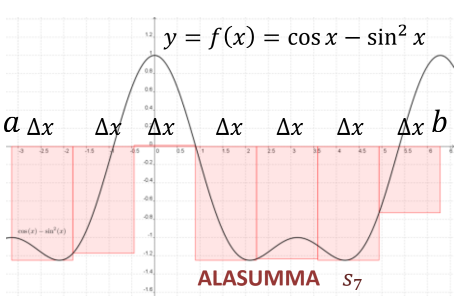
Ala-ja yläsummat (tarkemmin arvot m_k ja M_k) voivat olla hankalia määrittää, jos funktio on haastava. Tällöin voi hyödyntää *välisummaa*,

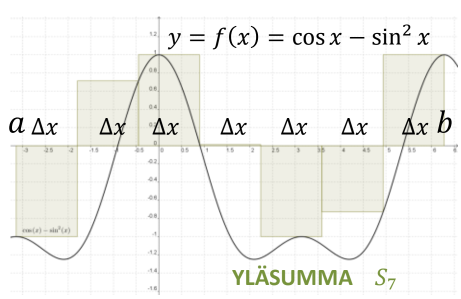
$$S_{\text{väli},n} \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x\,,$$

jossa arvoille $f(x_k)$ pätee: $m_k \le f(x_k) \le M_k$ kaikilla osaväleillä. Näin ollen välisummalle on $s_n \le S_{\text{väli}} \le S_n$ ja rajankäynti antaa pinta-alan, koska välisumma on aina ala- ja yläsumman välissä. Kirjan kuvat s. 54.

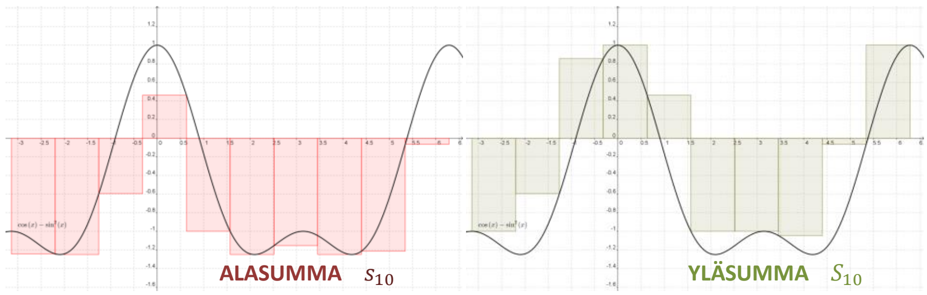
Määrätty integraali

Olkoon f edelleen jatkuva välillä $[a, b]$, mutta luovutaan ei-negatiivisuusehdosta, sillä yleisessä porrassummassa voi olla negatiivisiakin termejä. Syy, tulo $f(x)\Delta x$ on aina samanmerkkinen kuin $f(x)$.



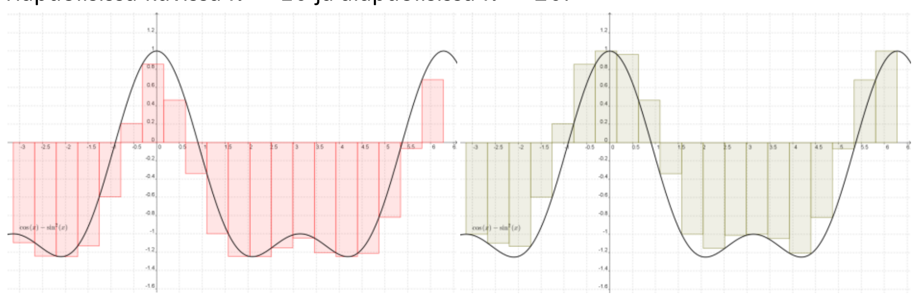


Jakoa tihennettäessä, eli kun $n \to \infty$, porrassummat (sekä ala- että yläsumma) lähestyvät tällöinkin tiettyä raja-arvoa, jota kutsutaan *funktion f määrätyksi integraaliksi a:sta b:hen*. Kyseinen raja-arvo, joka on <u>reaaliluku</u>, on niiden alueiden pinta-alojen erotus, jotka käyrä tarkasteltavalla välillä rajoittaa x-akselin ja ylä- ja alapuolelle, voi olla negat.



ALASUMMA s_{10} **YLÄSUMMA** S_{10}

Yläpuolisissa kuvissa $n = 10$ ja alapuolisissa $n = 20$.



ALASUMMA s_{20} **YLÄSUMMA** S_{20}

Jos välinä olisi -3:sta 6:een niin tämän esimerkkifunktion tapauksessa määrätyn integraalin arvo olisi jotain negatiivista (tarkastele x-akselin ala- ja yläp. pinta-aloja).

Määritelmä, *määrätty integraali*:
Olkoon f välillä $[a, b]$ määritelty jatkuva funktio. Funktion f *määrätty integraali* tällä välillä, merkitään

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

on porrassumman raja-arvo, kun välin $[a, b]$ jakoa tihennetään rajattomasti, eli kun jakovälin pituus Δx lähenee nollaa.
Siis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x}^{=s_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x}^{=S_n}.$$

Väliä $[a, b]$ sanotaan *integroimisväliksi* ja päätepisteitä a ja b *integroimisrajoiksi*: a on alaraja ja b on yläraja.
Merkintä $\int_a^b f(x)\,dx$ luetaan: "määrätty integraali a:sta b:hen $fxdx$", integraalimerkki $\int$ tulee summaa tarkoittavasta S-kirjaimesta ja dx on äärettömän pieni, infinitesimaalinen suure, tulee kun $\Delta x \to 0$.

Esimerkki Laske **a)** $\int_1^3 (4-x)\,dx$, **b)** $\int_4^6 (4-x)\,dx$ ja **b)** $\int_1^6 (4-x)\,dx$

a) Koska funktio $f(x) = 4 - x$ on välillä $[1,3]$ positiivinen, kysytty integraali on varjostettu ala (puolisuunnikas), eli

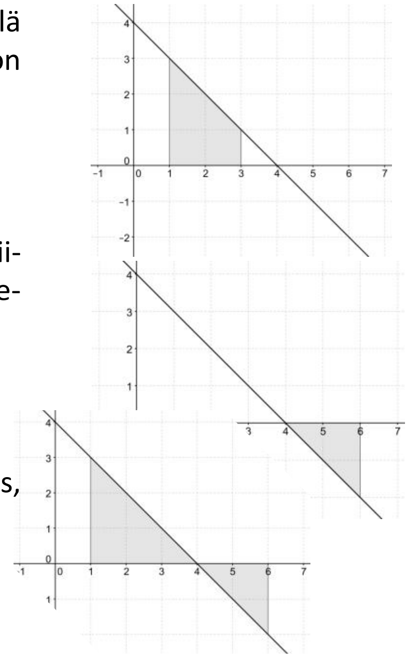
$$\int_1^3 (4-x)\,dx = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4\,.$$

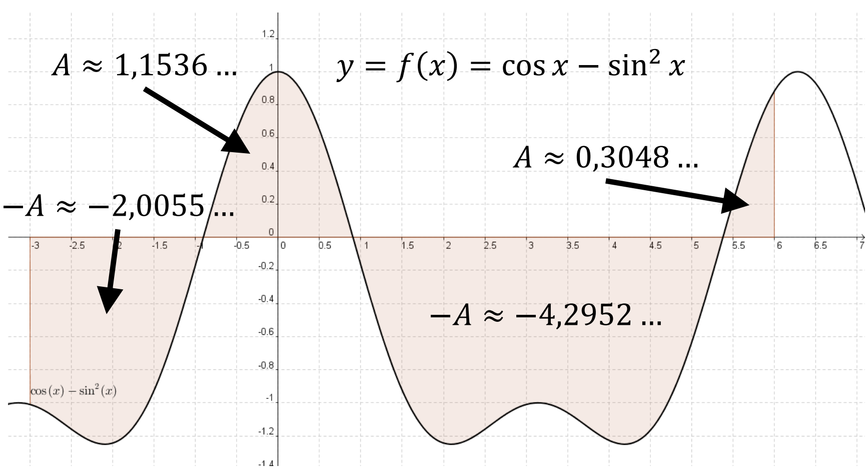
b) Välillä $[4,6]$ $f(x) = 4 - x$ on ei-positiivinen, joten kysytty integraali on varjostetun alan vastaluku, eli

$$\int_4^6 (4-x)\,dx = -\frac{2\cdot 2}{2} = -2\,.$$

c) Nyt kysytty integraali on alojen erotus, eli

$$\int_1^6 (4-x)\,dx = \frac{3\cdot 3}{2} - \frac{2\cdot 2}{2} = 2\tfrac{1}{2}\,.$$





Esimerkkifunktiolle f: $f(x) = \cos x - \sin^2 x$ saadaan pinta-alat tai pinta-alojen vastaluvut. Näin ollen määrätty integraali on

$$\int_{-3}^{6} (\cos x - \sin^2 x)\,dx \approx 1{,}1536\ldots + 0{,}3048\ldots - 2{,}0055\ldots - 4{,}2952\ldots$$

$$\approx -4{,}84229\ldots\,, \qquad \left(\frac{\sin 12}{4} + \frac{5\cdot\sin 6}{4} + \sin 2 - \frac{9}{2}\right)$$

Määrätyn integraalin yhteys pinta-alaan

(tässä vaiheessa)

Yleisesti määrätty integraali <u>ei</u> anna pinta-alaa vaan reaaliluvun. Pinta-ala ei voi olla negatiivista mutta määrätty integraali voi.

Milloin määrätty integraali sitten antaa pinta-alan? Silloin, kun funktio on ei-negatiivinen kyseisellä tarkasteluvälillä.

Olkoon f: $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, jolloin f on ei-negatiivinen. Tällöin käyrän $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$, x-akselin ja suorien $x = 0, x = 4$ väliin jäävä pinta-ala on sama kuin määrätty integraali 0:sta 4:ään:

$$\int_0^4 (0{,}5x^2 - 2x + 2)\,dx = 6\frac{2}{3}$$