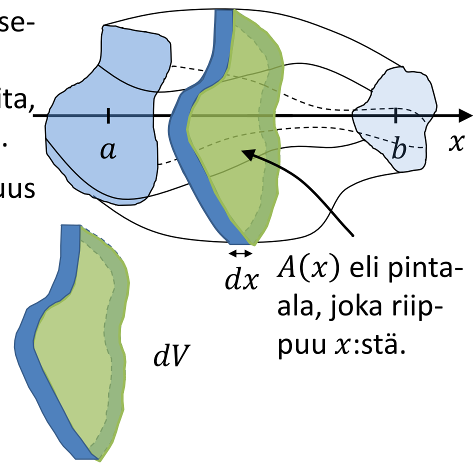
Tilavuuden laskeminen

Pinta-alan määrittämisessä summattiin pinta-alkioita dA. Nyt summataan tilavuusalkioita dV. Kuinka dV voidaan ilmoittaa muuttujan x ja dx:n kautta on haasteellisin osa tilavuuden määrittämisessä.

Viipaloidaan annettu kappale x-akselia kohtisuorasti dx-levyisiin osiin. Tällöin muodostuu ohuita viipaleita, leveys dx, joiden pinta-ala on $A(x)$.



Näin ollen ohuen viipaleen tilavuus on

$$dV = \underbrace{A(x)}_{\substack{\text{viipaleen} \\ \text{pinta-ala}}} \cdot \underbrace{dx}_{\substack{\text{viipaleen} \\ \text{korkeus}}}$$

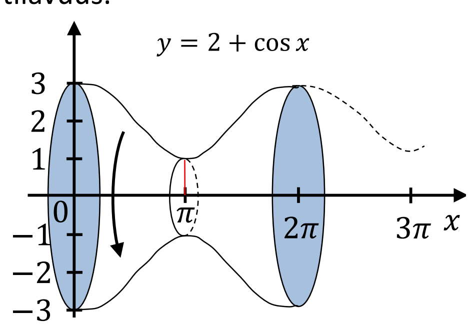
ja koko kappaleen

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\,dx\,.$$

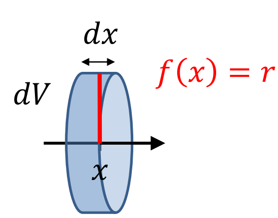
Huomaa, että pinta-ala $A = A(x)$ on funktio, joka on usein kohtuu hankala määrittää, jos kyseinen kappale <u>ei</u> ole pyörähdyskappale.

Esimerkki Pyörähdyskappaleen tilavuus.

Käyrä $y = 2 + \cos x$ pyörähtää x-akselin ympäri. Laske pyörähdyskappaleen tilavuus, kun välinä on $[0,2\pi]$.



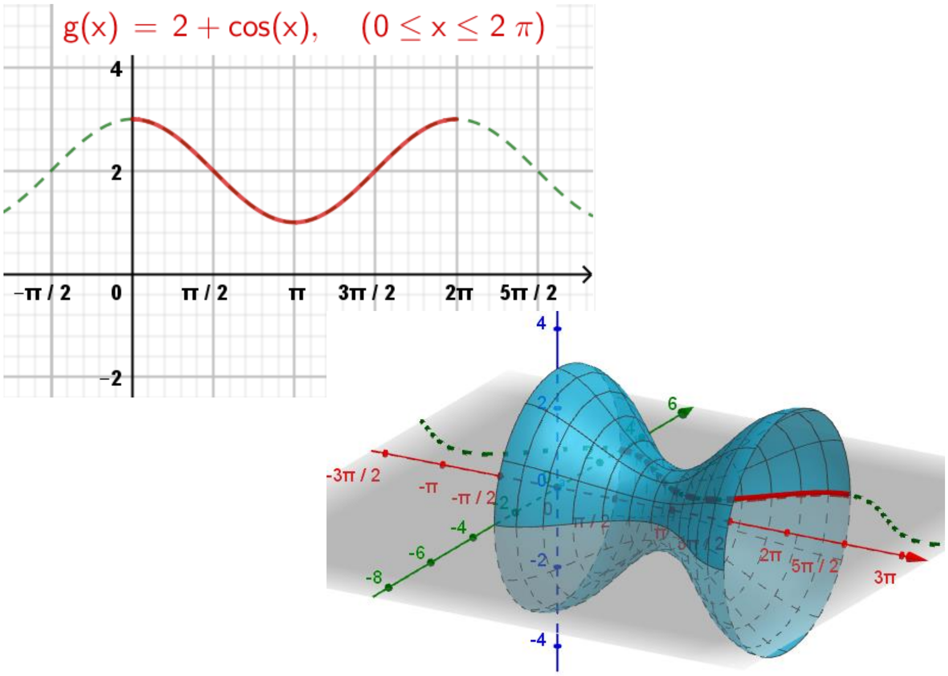
Havaitaan, että ohuet viipaleet ovat sylintereitä, jolloin niiden pinta-ala on ympyrän pinta-ala, πr^2.



Mikä on säde? Sehän on funktion f arvo kohdassa x, eli $r = f(x)$. Siis

$$A(x) = \pi\big(f(x)\big)^2$$

ja tilavuus



$$V = \int_0^{2\pi} \underbrace{\pi \cdot (2+\cos x)^2}_{=A(x)}\,dx = \pi \int_0^{2\pi} (4 + 4\cos x + \cos^2 x)\,dx$$

Muista: $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$$= \pi \int_0^{2\pi} \left(4 + 4\cos x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \pi \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{9}{2} + 4\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= \pi \Big/_{0}^{2\pi} \tfrac{9}{2}x + 4\sin x + \tfrac{1}{4}\sin 2x = \pi[(9\pi + 0 + 0) - (0 + 0 + 0)]$$

$$= 9\pi^2$$

Jos pyörähdysakselina on y-akseli, niin

$$V = \int_c^d \pi \cdot \big(g(y)\big)^2\,dy,$$

missä $g(y)$ on funktio, joka riippuu muuttujasta y.

Jos pyörähdysakselina on x-akselin suuntainen suora $y = h$, niin kohdassa x olevan tilavuusalkion dV pohjaympyrän säde saadaan itseisarvosta

$$r = |f(x) - h| \, .$$

Ja tilavuus

$$V = \int_a^b dV = \pi \cdot \int_a^b (f(x) - h)^2 \, dx,$$

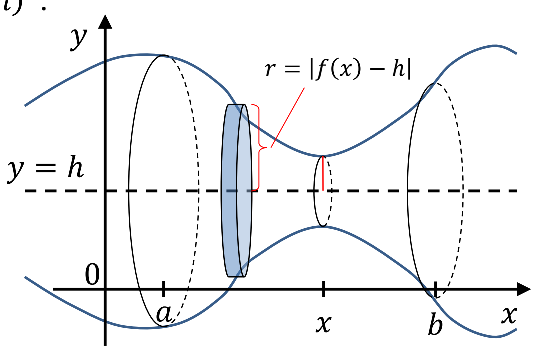
koska $|f(x) - h|^2 = (f(x) - h)^2$.

Vastaavasti jos pyörähdysakselina on jokin y-akselin suuntainen suora $x = k$. Tällöin

$$r = |g(y) - k|$$

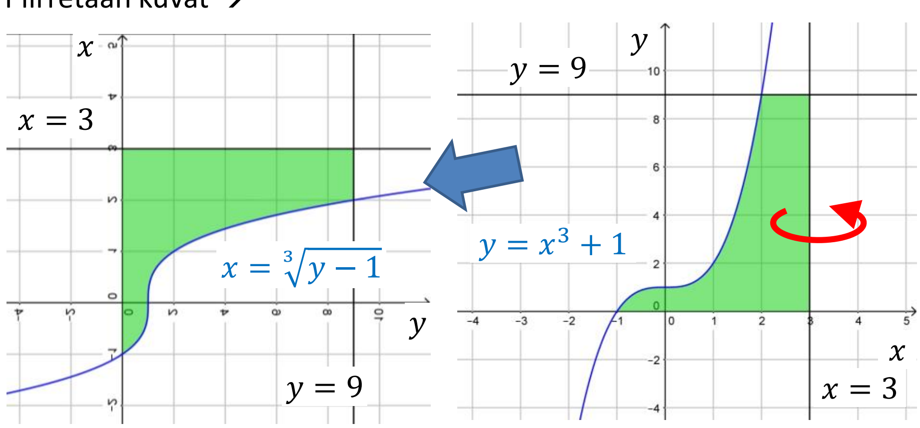
ja

$$V = \pi \int_c^d (g(y) - k)^2 \, dy$$

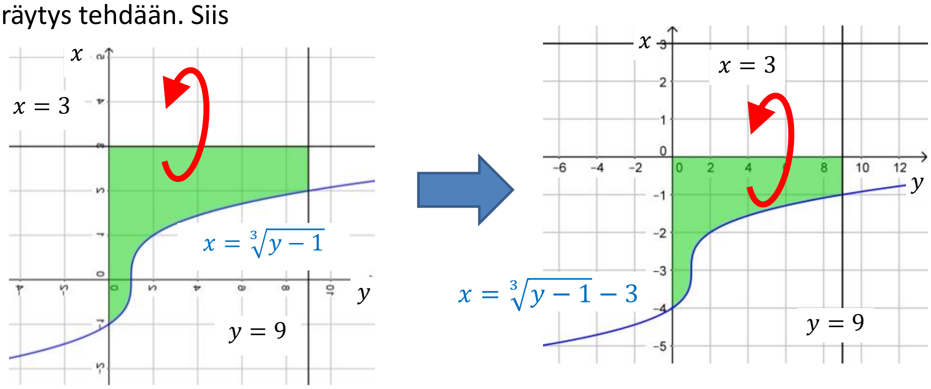


Esimerkki Kun pyörähdysakseli on suora $x = x_0$. YO S01/12
Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka syntyy x-akselin, suorien $x = 3$ ja $y = 9$ sekä käyrän $y = x^3 + 1$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $x = 3$ ympäri.

Käyrästä $y = x^3 + 1$ saadaan $y - 1 = x^3$ ja $x = \sqrt[3]{y-1}$ (hyvin määr.).
Piirretään kuvat →



Ajatuksena on tehdä suorasta $x = 3$ ns. ”uusi y-akseli”, jonka suhteen pyöräytys tehdään. Siis

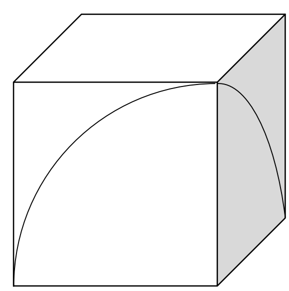


Huomaa, että käyrä, jota integroidaan on nyt $x = \sqrt[3]{y-1} - 3$. Näin ollen

$$V = \pi \cdot \int_0^9 \left(\sqrt[3]{y-1} - 3\right)^2 dy = \pi \cdot \int_0^9 \left((y-1)^{\frac{2}{3}} - 6(y-1)^{\frac{1}{3}} + 9\right) dy$$

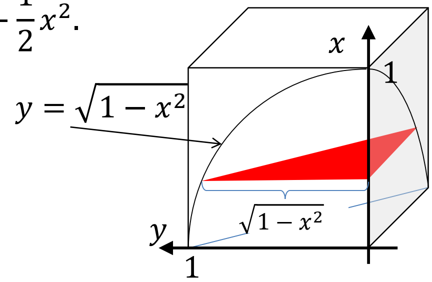
$$= \pi \cdot \Big/_0^9 \frac{3}{5}(y-1)^{\frac{5}{3}} - 6 \cdot \frac{3}{4}(y-1)^{\frac{4}{3}} + 9y = \ \dots \ = \pi \cdot 33\frac{3}{10}$$

Esimerkki Kuutio, jonka särmän pituus on 1, leikataan suoralla kahteen osaan yhdestä kärjestä alkaen niin, että kahdelle vierekkäiselle sivulle syntyvät leikkausurat ovat muodoltaan neljännesympyrän kaaria. Katso kuva. Laske pienemmän osan tilavuuden suhde suurempaan osaan.



Ratkaisu Valitaan akselit kuten kuvassa. Tällöin leikkauskuvio korkeudella x on tasakylkinen kolmio, jolle pinta-ala

$$A\colon \ A(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2.$$



Näin ollen pienemmän osan tilavuus on

$$V_{\text{pieni osa}} = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \overbrace{\ldots}^{\text{laskin}} = \frac{1}{3}$$

$$V_{\text{iso osa}} = 1 - V_{\text{pieni osa}} = \frac{2}{3}$$

Kysytty suhde

$$\frac{V_{\text{pieni osa}}}{V_{\text{iso osa}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$