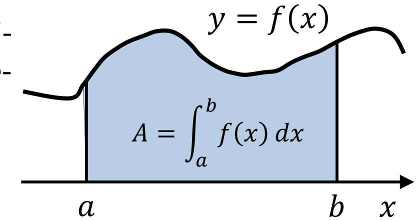
Pinta-alan laskeminen

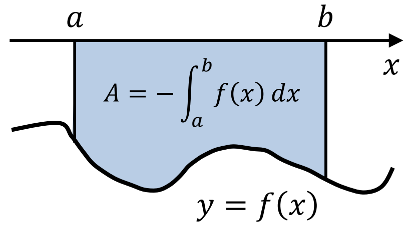
Esimerkki Välillä $[a, b]$ jatkuvan, ei-negatiivisen funktion f määrätty integraali antaa suoraan pinta-alan, eli

$$\int_a^b f(x)\,dx = A\,.$$



Toisaalta, jos f on välillä $[a, b]$, ei-positiivinen, eli $f(x) \leq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, niin määrätty integraali antaa pinta-alan vastaluvun, eli

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A\,.$$



Määrätty integraali on yleisesti **”arvoiltaan äärettömän pienistä termeistä eli integrointialkioista muodostettu ääretön summa”**. Tähän ideaan nojautuen sekä pinta-alan että tilavuuden määrittämisessä lasketaan eli summataan yhteen

- pinta-alkioita $dA = f(x)\,dx$, missä funktio f riippuu muuttujasta x.
- Tilavuusalkioita $dV = A(x)\,dx$, missä pinta-alafunktio A riippuu muuttujasta x.

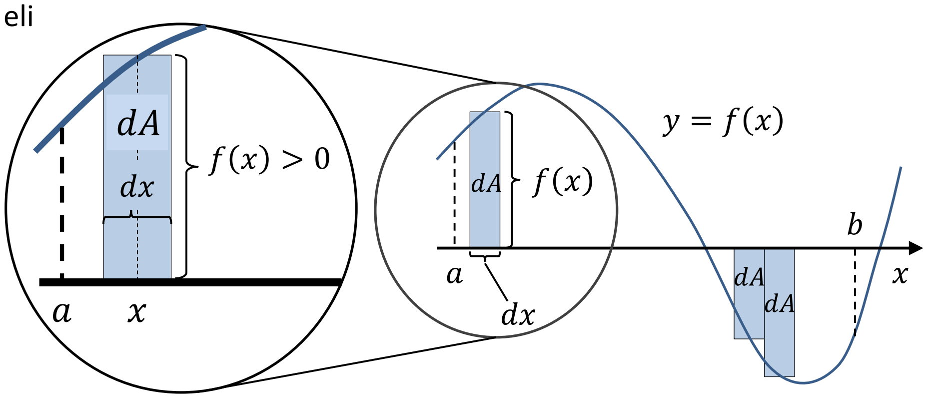
Huomautus Sovelluksissa (fysiikka) lasketaan määrättyjä integraaleja

$$\int_{x_1}^{x_2} d\Omega\ ,$$

missä $d\Omega$ on infinitesimaalinen integrointialkio ja Ω on funktio, joka riippuu muuttujasta x. Muuttujahan voi olla myös muu kuin x.

Pinta-alan määrittäminen

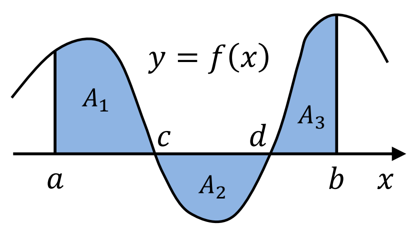
Pinta-ala-alkion $dA = f(x)\,dx$ merkki riippuu funktion f arvosta $f(x)$, eli



Jos funktio vaihtaa merkkiä +/-, niin jaetaan integroimisväli osiin funktion nollakohtien mukaan:

Esimerkki Väritetty ala on

$$A = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{=A_1} - \underbrace{\int_c^d f(x)\,dx}_{=A_2} + \underbrace{\int_d^b f(x)\,dx}_{=A_3},$$



jossa siis määrätty integraali

$$\int_c^d f(x)\,dx$$

antaa negatiivisen reaaliluvun ja siksi miinus tarvitaan eteen (pinta-ala ei voi olla negatiivista, määrätty integraali voi).

Kahden käyrän väliin jäävä pinta-ala vastaavalla tavalla. Nyt pinta-ala-alkion dA korkeus saadaan erotuksesta

$$f(x) - g(x), \qquad \text{kun } f(x) \geq g(x)\,.$$

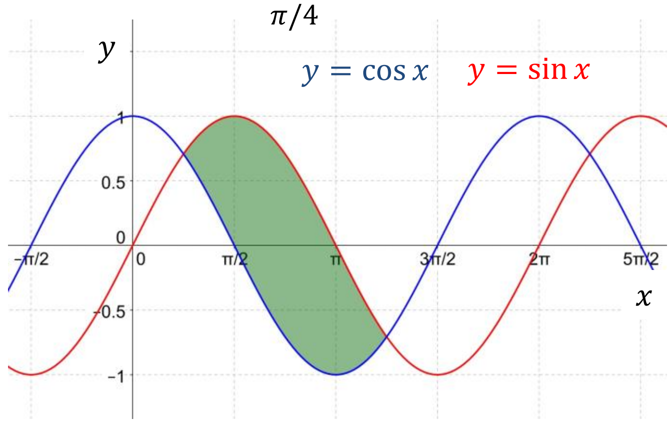
Esimerkki Laske käyrien $y = \sin x$ ja $y = \cos x$ kahden peräkkäisen leikkauspisteen välisten kaarien rajoittaman alueen pinta-ala.

→ Piirretään kuva

Leikkauspisteiksi saadaan $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$, ... ja toisaalta myös $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}$ $-\frac{11\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}$, ...(kun ratkaistaan yhtälö $y = y$ eli yhtälö $\sin x = \cos x$, josta seuraa yhtälö $\tan x = 1$).

Välillä $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ pätee $\sin x \geq \cos x$, joten

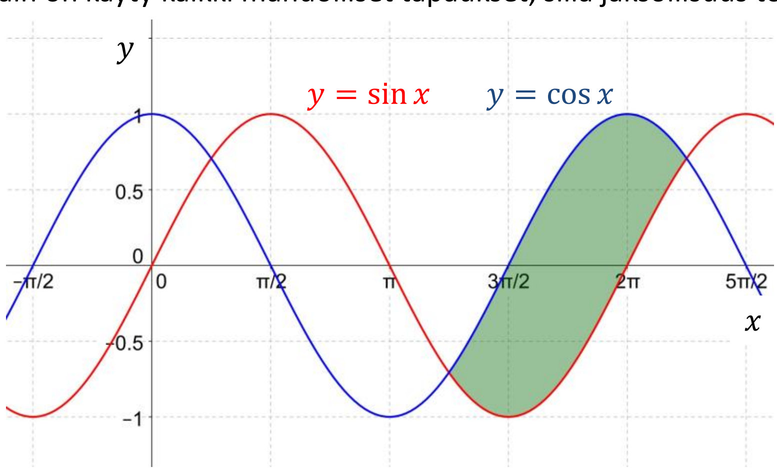
$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx = \Big/_{\pi/4}^{5\pi/4} -\cos x - \sin x = \ldots = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83\,.$$



Vastaavasti välillä $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$ pätee $\cos x \geq \sin x$, joten

$$A = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = \Big/_{5\pi/4}^{9\pi/4} \sin x + \cos x = \ldots = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83\,.$$

Ja näin on käyty kaikki mahdolliset tapaukset, sillä jaksollisuus toistuu.

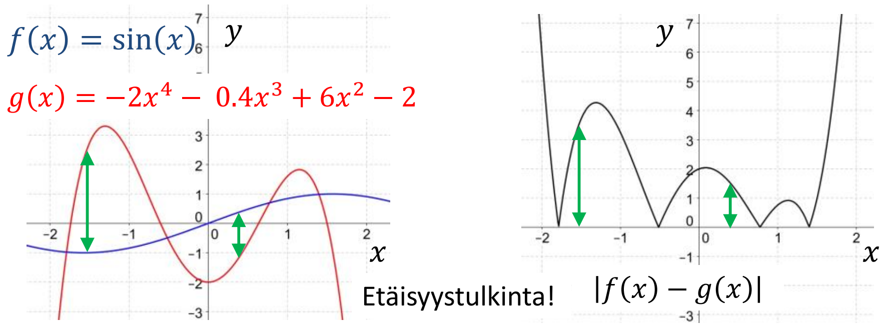


Yleisesti käyrät $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ voivat leikata useasti, joten kahden käyrän välisen pinta-alan, välillä $[a, b]$, antaa määrätty integraali

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx\,,$$

missä integroinnin voi suorittaa funktion $h = |f - g|$ nollakohtien määräämien osavälien mukaan (ei ole tarvetta, saa tehdä).

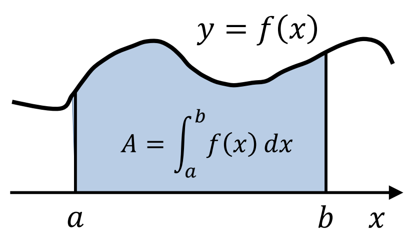
Huomautus Funktio $h = |f - g|$ on aina ei-negatiivista, joten määrätty integraali antaa suoraan pinta-alan, vrt. kirjan kuvat kpl 2.3.



Palataan vielä ”lähtöruutuun”. Miksi pinta-ala saadaan niin kuin se saadaan?
Määritelmän kautta…OK, mutta havaitse, että $f(x) = f(x) - 0$, jolloin $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b (f(x) - \underbrace{0}_{g(x)})\, dx$, ja kyllä nollafunktiokin ihan hyvä funktio on!

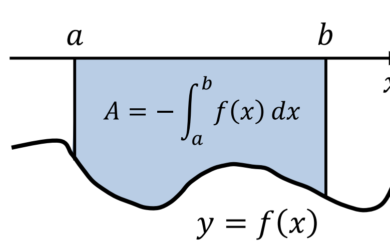
Esimerkki Välillä $[a, b]$ jatkuvan, ei-negatiivisen funktion f määrätty integraali antaa suoraan pinta-alan, eli

$$\int_a^b f(x)\, dx = A\,.$$



Toisaalta, jos f on välillä $[a, b]$, ei-positiivinen, eli $f(x) \leq 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, niin määrätty integraali antaa pinta-alan vastaluvun, eli

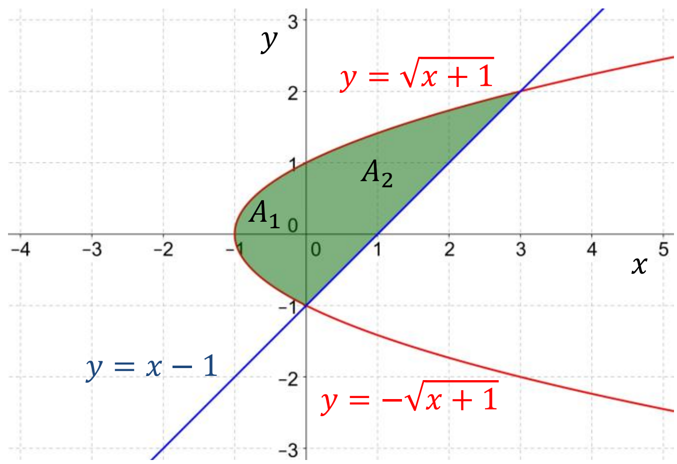
$$\int_a^b f(x)\, dx = -A\,.$$



Integrointi y-akselin suhteen

Tarkastellaan tehtävää. Periaatteessa osataan määrittää alat A_1 ja A_2, mutta muodostuu "haastavia integraaleja", eli

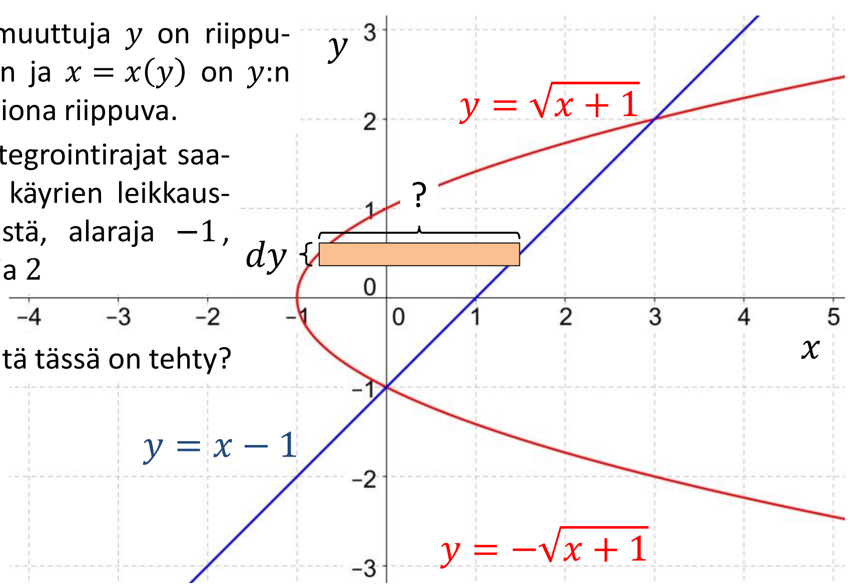
$$\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1})\right) dx + \int_{0}^{3} \left(\sqrt{x+1} - (x-1)\right) dx = \ldots\ ?$$



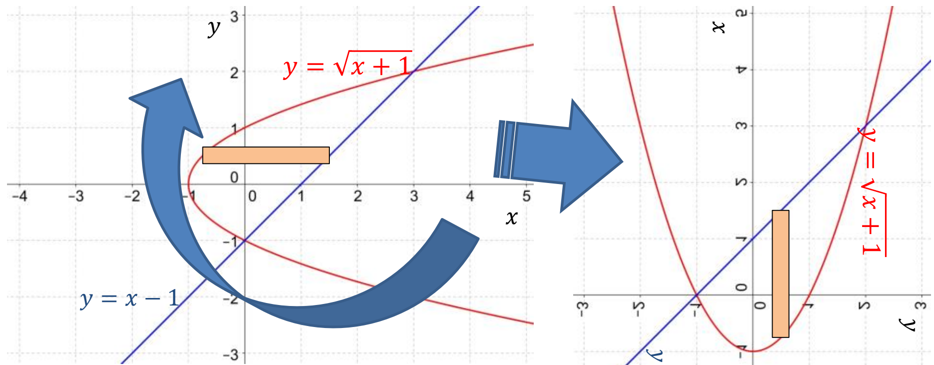
Entäpä näin: Muodostetaan portaat (suorakulmiot) y-akselin suhteen. Mikä on portaiden korkeus?

Nyt muuttuja y on riippumaton ja $x = x(y)$ on y:n funktiona riippuva.

→ Integrointirajat saadaan käyrien leikkauspisteistä, alaraja -1, yläraja 2

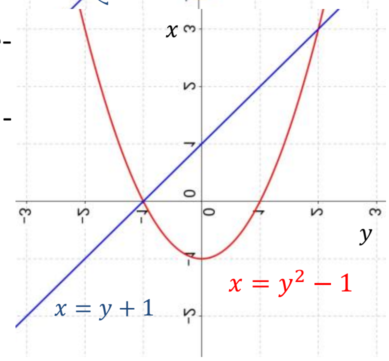


Eli mitä tässä on tehty?



Eli kierretään ja peilataan, saadaan x-akseli pystyakseliksi ja y-akseli vaaka-akseliksi. Nyt havaitaan, että ollaan tutussa tilanteessa ja pinta-alalle saadaan integraali

$$\int_{-1}^{2} [\underbrace{(y+1)}_{\text{"ylä"funktio}} - \underbrace{(y^2-1)}_{\text{"ala"funktio}}]\, dy$$



Integroidaan:

$$\int_{-1}^{2} [(y+1) - (y^2-1)]\, dy = \overset{2}{\underset{-1}{/}} \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right]$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 + 2\cdot(2)\right) - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2 + 2\cdot(-1)\right)\right]$$

$$= \left[3\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)\right] = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Lasketaan vielä, kun jako on tehty muuttujan x suhteen (alkuperäine tilanne)

$$\int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1})\right) dx + \int_{0}^{3} \left(\sqrt{x+1} - (x-1)\right) dx$$

$$= \overset{0}{\underset{-1}{/}}\ 2\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + \overset{3}{\underset{0}{/}} \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + x - \frac{1}{2}x^2\right]$$

$$=\ldots= \frac{4}{3} + \frac{16}{9} = \frac{9}{2} = 4{,}5, \qquad \text{OK}$$