Määrätyn integraalin ominaisuuksia

Oletetaan että funktiot f, g ovat jatkuvia, jolloin porrassummien raja-arvoja tai analyysin peruslausetta hyödyntäen saadaan määrätylle integraalille seuraavat laskusäännöt:

1. Kun $r \in \mathbb{R}$, niin

$$\int_a^b r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Tätä sanotaan vakiotekijäin siirroksi (kuten määräämättömässä integroinnissa).

2. Summan integraali on integraalien summa

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

3. Tyhjä integroimisväli (on nimensä mukaisesti ns. tyhjä arpa…)

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

4. Kun $a \leq c \leq b$, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

5. Integroimisrajojen vaihto

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Todistus: Kun $a < b$, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

6. Osittaisintegrointi

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \overset{b}{\underset{a}{/}} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Esimerkkejä

- Määritä/Laske $\int_0^{\pi/2} 3\cos x\,dx$. (vakion ulosotto)

$$\int_0^{\pi/2} 3\cos x\,dx = 3\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 3\overset{\frac{\pi}{2}}{\underset{0}{/}} \sin x = 3[1-0] = 3\,.$$

- Tiedetään, että $\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$. Laske $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$. (summan hyöd.)

Koska $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, niin

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)\,dx = \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \pi - \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

- Määrätyn integraalin ja integraalifunktion välinen yhteys pätee myös tyhjän integroimisvälin tapauksessa. ”Tyhjä arpa” antaa kaikilla $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^a f(x)\,dx = \overset{a}{\underset{a}{/}} F(x) = F(a) - F(a) = 0\,.$$

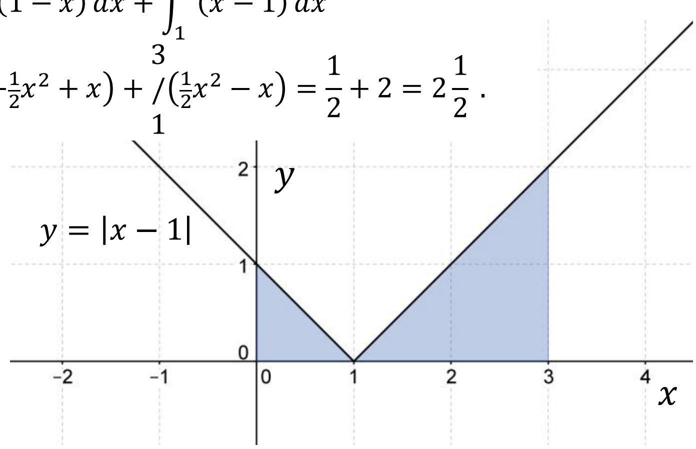
Esimerkkejä (jatkuu)

- Määritä/Laske $\int_0^3 |x-1|\,dx$. (paloittain määritelty)

Koska $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$, niin jaetaan integroimisväli $[0,3]$ vaihtumiskohdan mukaan kahteen osaan ja integroidaan paloittain, eli

$$\int_0^3 |x-1|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx$$

$$= \overset{1}{\underset{0}{/}}\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + x\right) + \overset{3}{\underset{1}{/}}\left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right) = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}\,.$$



Esimerkkejä (jatkuu)

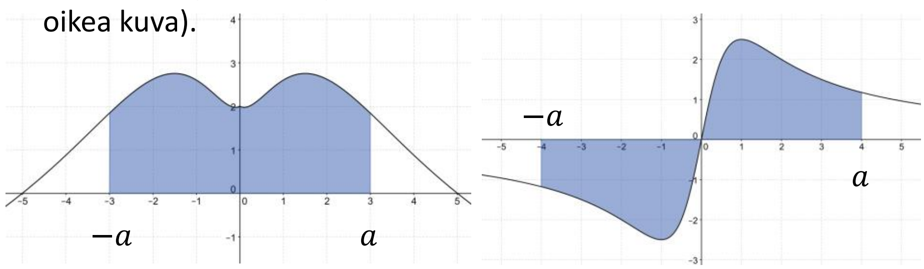
- Määritä/Laske $\int_4^2 1/x\, dx$.

$$\int_4^2 \frac{1}{x}\, dx = -\int_2^4 \frac{1}{x}\, dx = -\Big/_{\!2}^{\,4} \ln|x| = -(\ln 4 - \ln 2) = -\ln\tfrac{4}{2} = -\ln 2$$

TAI

$$\int_4^2 \frac{1}{x}\, dx = \Big/_{\!4}^{\,2} \ln x = \ln 2 - \ln 4 = \ln\tfrac{2}{4} = \ln\tfrac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$$

7. Parillisen ja parittoman funktion integrointi.
   Palautetaan mieleen kyseiset määritelmät: f on parillinen, jos $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (symmetria y-akselin suhteen, vasen kuva) ja f pariton, jos $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (symmetria origon suhteen, oikea kuva).



Parillisille f saadaan

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\, dx,$$

ja parittomille f

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

Esimerkki

- Määritä/Laske $\int_{-5}^{5}(x^4 - 6x^2 + 1)\,dx$.

Nyt f: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ on parillinen (vain parillisia potensseja), joten

$$\int_{-5}^{5}(x^4 - 6x^2 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{5}(x^4 - 6x^2 + 1)\,dx$$

$$= 2\Big/_{0}^{5}\ \tfrac{1}{5}x^5 - 2x^3 + x = \ldots = 760$$

- Määritä/Laske $\int_{1}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\pi}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

$$\int_{1}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx + \int_{\pi}^{1}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{1}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_{1}^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx = 0\,.$$