Paloittain määritetyn funktion integrointi

Esimerkki

Määritä funktion $f: f(x) = |x-1|$ kaikki integraalifunktiot.

Nyt f on jatkuva, joten $F(x) = \int f(x)\,dx$ on ainakin olemassa. Koska

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{kun } x-1 \geq 0 \text{ eli kun } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{kun } x-1 < 0 \text{ eli kun } x < 1 \end{cases},$$

niin

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int (x-1)\,dx, & \text{kun } x \geq 1 \\ \displaystyle\int (1-x)\,dx, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C, & \text{kun } x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + D, & \text{kun } x < 1 \end{cases}, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

Nyt integroimisvakiot C, D eivät ole toisistaan riippumattomia, koska integraalifunktion F pitää olla jatkuva myös kohdassa $x = 1$. Täytyy siis olla

$$\lim_{x \to 1-} F(x) = \lim_{x \to 1+} F(x) = F(1),$$

eli

$$\underbrace{\lim_{x \to 1-} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + D\right) = \lim_{x \to 1+} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + C\right)}_{-\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 1 + D = \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1 + C} = F(1)\,.$$

$$D = \frac{1}{2} - 1 + C + \frac{1}{2} - 1 = C - 1$$

(Voisi ratkaista myös vakion C vakion D avulla.) Saadaan

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C, & \text{kun } x \geq 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + C - 1, & \text{kun } x < 1 \end{cases}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)|x-1| + C'$$

Ei tarvitse palauttaa itseisarvomuotoon, riittää paloittain määrittely.

Esimerkki

Määritä funktion $f: f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kun } x \leq 1 \\ 2, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$ se integraalifunktio, joka toteuttaa alkuehdon $F(0) = 1$, eli se integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(0,1)$ kautta.

Aluksi: Funktio f on jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, myös kohdassa $x = 1$. Tästä seuraa, että integraalifunktio on olemassa (ja derivoituvana jatkuva).

$$F(x) = \begin{cases} \int (x+1)\,dx, & \text{kun } x \leq 1 \\ \int 2\,dx, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + C_1, & \text{kun } x \leq 1 \\ 2x + C_2, & \text{kun } x > 1 \end{cases}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Jatkuvuusehto: Kohdassa $x = 1$ täytyy siis olla

$$\lim_{x \to 1-} \left(\frac{1}{2}x^2 + x + C_1 \right) = \lim_{x \to 1+} (2x + C_2) = F(1),$$

eli

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 + C_1 = 2 \cdot 1 + C_2 = F(1)$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 2 + C_2 - \frac{1}{2} - 1 = C_2 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + C_2 + \frac{1}{2}, & \text{kun } x \leq 1 \\ 2x + C_2, & \text{kun } x > 1 \end{cases}.$$

Alkuehto: $F(0) = 1$, eli muuttuja $x = 0$, joten valitaan integraalifunktioksi

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C_2 + \frac{1}{2}, \qquad \text{jolloin kohdassa } x = 0$$

$$F(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0 + C_2 + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

Vastaus: Kysytty integraalifunktio on

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + 1, & \text{kun } x \leq 1 \\ 2x + \frac{1}{2}, & \text{kun } x > 1 \end{cases}.$$

Huomautus Ole tarkkana kumman lausekkeen valitset, kun määrität alkuehdon täyttävää integraalifunktiota. Katso kumman ehdon kysei-nen kohta $x = x_0$ täyttää.

Osittaisintegrointi

INTEGRAALILASKENTA, MAA9

("Jos et tiedä mitä tehdä, osittaisintegroi")

Integroimalla tulon derivoimissäännön

$$D\big(f(x) \cdot g(x)\big) = D\big(f(x)\big) \cdot g(x) + f(x) \cdot D\big(g(x)\big)$$

molemmat puolet saadaan

$$f(x) \cdot g(x) = \int D\big(f(x)\big) \cdot g(x)\,dx + \int f(x) \cdot D\big(g(x)\big)\,dx.$$

Jos annettu funktio, mikä pitää integroida, on muotoa $D\big(f(x)\big) \cdot g(x)$, niin yllä olevan *osittaisintegrointisäännön* nojalla pätee (integroimis-vakio C voidaan sisällyttää integraaleihin ja lisätä vasta lopuksi.)

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx\,.$$

Esimerkki Määritä $\int x \cos x \, dx$.

Valitaan $f'(x) = \cos x$ ja $g(x) = x$, jolloin

$f(x) = \sin x + C$ ja $g'(x) = 1$

Huomautus Vain yksi integraalifunktio f riittää → asetetaan $C = 0$.

Näin ollen

$$\int \underbrace{x}_{g} \cdot \underbrace{\cos x}_{f'} \, dx = \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{x}_{g} - \int \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} \, dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x - (-\cos x + C)$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

IDEA: Valitaan f ja g siten, että yhtälön oikean puolen integraali on helpompi integroida kuin alkuperäinen integraali. Eli valinnalla

$f'(x) = x$ ja $g(x) = \cos x$, jolloin

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ ja $g'(x) = -\sin x$

olisi tullut vaikeampi integraali $\int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{f} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{g'} \, dx$.

Esimerkki Määritä $\int \ln x \, dx$.

Aluksi havaitaan, että

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$$

Valinta: $f'(x) = 1$ ja $g(x) = \ln x$, jolloin

$f(x) = x + C$ ja $g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} dx$$

$$= x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$

Tulos löytyy MAOL:sta.