Rationaalifunktion integrointi ja osamurtokehitelmä

INTEGRAALILASKENTA, MAA9

Tapaus 1: Jos rationaalifunktiossa $\frac{p(x)}{q(x)}$ osoittajan asteluku on suurempi tai yhtä suuri kuin nimittäjän asteluku, niin suoritetaan jakolasku ennen integrointia (ns. asteluvun pudottaminen).

Esimerkki

Määritä $\int \frac{2x^2+1}{x}dx$. Koska $\frac{2x^2+1}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$, niin

$$\int \frac{2x^2+1}{x}dx = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx = x^2 + \ln|x| + C, \qquad x \neq 0.$$

Määritä $\int \frac{x-2}{x+1}dx$. Koska $x - 2 = x + 1 - 3$, niin

$$\int \frac{x-2}{x+1}dx = \int \frac{x+1-3}{x+1}dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1}\right)dx = \int 1\,dx - \int \frac{3}{x+1}dx$$

$$= \int dx - 3\int \frac{1}{x+1}dx = x - 3\ln|x+1| + C, \qquad x \neq -1.$$

Määritä $\int \frac{3x^2-x+2}{x-1}dx$. Jakokulma antaa $3x^2 - x + 2 = 3x + 2 + \frac{4}{x-1}$, joten

$$\int \frac{3x^2-x+2}{x-1}dx = \int \left(3x + 2 + \frac{4}{x-1}\right)dx = \int 3x\,dx + \int 2\,dx + \int \frac{4}{x-1}dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 2x + 4\ln|x-1| + C, \qquad x \neq 1.$$

Tapaus 2: Jos rationaalifunktiossa $\frac{p(x)}{q(x)}$ osoittajan asteluku on pienempi kuin nimittäjän asteluku <u>*ja*</u> nimittäjä jakautuu tekijöihin

$$q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x),$$

niin $\frac{p(x)}{q(x)}$ voidaan esittää *osamurtokehitelmämuodossa*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)},$$

missä oikean puolen osoittajien $p_1(x), p_2(x)$ asteluvut ovat yhtä pienemmät kuin nimittäjien $q_1(x), q_2(x)$ asteluvut.

Esimerkki Määritä $\int \frac{4}{x^2-1}\,dx$.

Nyt nimittäjä $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$ on kahden ensimmäisen asteen tekijän tulo $q(x)=q_1(x)\cdot q_2(x)$.

Näin ollen osamurtokehitelmässä osoittajat ovat nollannen asteen polynomeja eli vakioita. Siis

$$\frac{4}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}, \qquad x\neq -1, x\neq 1\,.$$

Vakiot A ja B pitää selvittää; kerrotaan yhtälöstä nimittäjät pois

$$\begin{aligned}\frac{4}{x^2-1}&=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \qquad\qquad |\cdot(x-1)(x+1)\\ 4+0\cdot x&=A(x+1)+B(x-1)\\ 4&=Ax+A+Bx-B\\ 4&=(A+B)x+(A-B\,), \qquad x\neq -1, x\neq 1\end{aligned}$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases}4=A-B\\0=A+B\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}4=-B-B=-2B\\A=-B\uparrow \text{sij.}\end{cases} \quad \Longrightarrow \; B=-2 \text{ ja } A=2\,.$$

Eli

$$\frac{4}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x+1}, \qquad \text{jolloin}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{4}{x^2-1}\,dx&=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x+1}\right)dx=\int\frac{2}{x-1}\,dx+\int\frac{-2}{x+1}\,dx\\ &=2\int\frac{1}{x-1}\,dx-2\int\frac{1}{x+1}\,dx=2\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C\\ &=\ln(x-1)^2-\ln(x+1)^2+C=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+C\;.\end{aligned}$$

Esimerkki Määritä $\int \frac{4-2x}{x^2-1}\,dx$ (nimittäjä sama, osoittaja hieman muuttui). Nyt alku samoin kuin edellä, yhtälöparivaiheessa tulee

$$\begin{cases} 4 = A - B \\ -2 = A + B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = 4 + B \downarrow \text{sij.} \\ -2 = 4 + B + B = 4 + 2B \end{cases} \Longrightarrow B = -3 \text{ ja } A = 1$$

Eli

$$\frac{4-2x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x+1}, \qquad \text{jolloin}$$

$$\int \frac{4-2x}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-3}{x+1}\right) dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{-3}{x+1}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1}\,dx - 3\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x-1| - 3\ln|x+1| + C\,.$$