Trigonometristen funktioiden integrointi

Esimerkki

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x + C = \sin x \cos x + C$$

TARKISTUS: $D\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right) = \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2 + 0 = \cos 2x$, OK.

Yleisesti trigonometrisille funktioille saadaan integroimiskaavat:

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad \int f'(x)\cos\big(f(x)\big)\, dx = \sin\big(f(x)\big) + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \int f'(x)\sin\big(f(x)\big)\, dx = -\cos\big(f(x)\big) + C$$

Esimerkki

a) Määritä $\int \sin x \cos^2 x\, dx$.

Nyt funktiolle $f: f(x) = \cos x$ saadaan $f'(x) = -\sin x$, joten

$$\int \sin x \cos^2 x\, dx = -\int -\sin x \cos^2 x\, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

$$\left(\int f'(x)\, f(x)^2\, dx = \frac{1}{3} f(x)^3 + C\right)$$

b) Määritä $\int \tan x\, dx$.

Koska $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ja $D(\cos x) = -\sin x$, niin

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\left(-\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\ln|f(x)| + C\right)$$

MUISTA: Tämä tulos on voimassa kaikilla väleillä, joihin ei kuulu mikään $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$. Syy: integraalifunktion määritelmä.

c) Määritä $\int \tan^2 x\,dx$.

Koska $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, niin lisäämällä nolla muodossa $0 = 1 - 1$ saadaan

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (1 + \tan^2 x - 1)\,dx = \int (1 + \tan^2 x)\,dx - \int dx$$

$$= \int D(\tan x)\,dx - \int dx = \tan x - x + C\,.$$

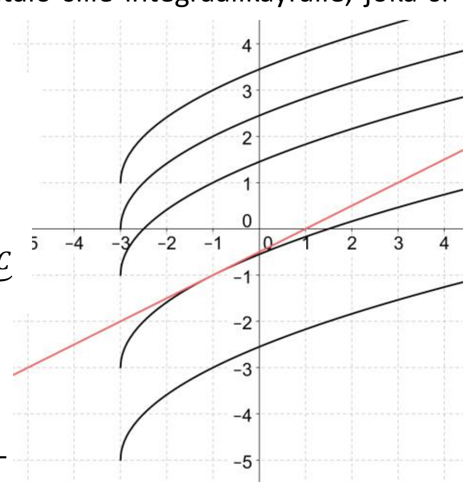
$$\int (\sin x + \cos x)^2\,dx = \int (\sin^2 x + \overbrace{2\sin x \cos x}^{\sin 2x} + \cos^2 x)\,dx$$

$$= \int (1 + \sin 2x)\,dx = \int dx + \frac{1}{2}\int 2 \cdot \sin 2x\,dx = x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

siirretään vakioon

$$\left(= x - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + C = x - \frac{1}{2} + \sin^2 x + C = x + \sin^2 x + C'\right)$$

Esimerkki Oheisessa kuvassa on eräitä funktion $f: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$, $x > -3$ integraalikäyriä. Määritä yhtälö sille integraalikäyrälle, joka sivuaa suoraa $y = y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.



Integrointi antaa:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+6}}\,dx = \int (2x+6)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+6)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \underbrace{(2x+6)^{\frac{1}{2}} + C}_{=F(x)}$$

Etsitään se kohta x, jossa

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{2}\,,$$

eli suoran $y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ kulmakerroin (”sivuaa”), katso kuva.

Saadaan (laskemalla, älkää katsoko kuvasta), ehto $x > -3$ huomioiden

$$\frac{1}{\sqrt{2x+6}} = \frac{1}{2} \quad \overset{\uparrow^2}{\overbrace{\Longrightarrow}} \quad 2x + 6 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = -1, \qquad \text{OK (ehto)},$$

joten kohdassa $x = -1$ pitää olla $y = y$ eli $F(-1) = \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}$.

Siis

$$F(-1) = \frac{1}{2}(-1) - \frac{1}{2}$$

$$(2(-1) + 6)^{\frac{1}{2}} + C = -1$$

$$\sqrt{4} + C = -1$$

$$C = -3$$

Lopuksi

$$F(x) = \sqrt{2x+6} - 3\,.$$