Yhdistetyn funktion integrointi

Kertausta: Yhdistetyn funktion derivointi:

$$D\big((2x-5)^3\big) = \underbrace{3\cdot(2x-5)^2}\cdot\underbrace{2} = 6(2x-5)^2$$

$$D\big((g\circ f)(x)\big) = g'\big(f(x)\big)\ \cdot\ f'(x)$$

$$D\ g\big(f(x)\big) = \begin{matrix}\text{ulkofunktion}\\ \text{derivaatta}\end{matrix}\cdot\begin{matrix}\text{sisäfunktion}\\ \text{derivaatta}\end{matrix}$$

Eli g: $g(x) = (\quad)^3$ ja f: $f(x) = 2x-5$.

Entäpä $D(\ln(2x-5)^3)$?

$$D(\ln(2x-5)^3) \overset{x>\frac{2}{5}}{\cong} \underbrace{\frac{1}{(2x-5)^3}}\cdot\underbrace{3\cdot(2x-5)^2}\cdot\underbrace{2} = \frac{6}{2x-5}$$

$$D\big((h\circ g\circ f)(x)\big) = h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\ \cdot\ g'\big(f(x)\big)\ \cdot\ f'(x)$$

Hyödyntämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä (ketjusääntö) ja tietoa

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C\,,$$

saadaan yhdistetyn funktion integroimissääntö

Lause, yhdistetyn funktion derivaatan integroimissääntö:

$$\int \underbrace{f'(x)\cdot g'\big(f(x)\big)}\,dx = g\big(f(x)\big) + C.$$

Sääntö vaatii, että *integrandista* löytyy tai se voidaan saattaa muotoon (huijaus: nollan lisääminen, ykkösellä kertominen jne.)

$$\begin{matrix}\text{sisäfunktion derivaatta}\\ \text{kohdassa } x\end{matrix}\cdot\begin{matrix}\text{ulkofunktion derivaatta}\\ \text{kohdassa } f(x)\end{matrix}$$

ja että ulkofunktion g' integraalifunktio g osataan laskea/määrittää.

Tämä on haastavaa (aluksi), nimittäin yleensä on annettu vain yksi lauseke eli funktio ja jotenkin se pitäisi muokata em. muotoon.

Huomautus Sama asia ilmaistuna toisin merkinnöin:

$$\int f'(x)\cdot g\big(f(x)\big)\,dx = G\big(f(x)\big)+C, \qquad \text{missä } G' = g.$$

Esimerkkejä

a) $$\int \underbrace{(3x^2+2)}_{=f'}\cdot\underbrace{(x^3+2x)}_{=f}{}^5\,dx = \frac{1}{6}(x^3+2x)^6+C\,,$$

Koska $D\left(\frac{1}{6}(x^3+2x)^6+C\right)=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot(x^3+2x)^5\cdot(3x^2+2)+0$, ja asia OK. Yleisesti pätee

$$\int f'(x)\cdot f(x)^a\,dx = \frac{1}{a+1}f(x)^{a+1}+C, \qquad a\neq -1\,.$$

b) $$\int \frac{2x}{5-x^2}\,dx = \int(-1)(-1)\frac{2x}{5-x^2}\,dx = -\int\frac{-2x}{5-x^2}\,dx$$

$Dx^2 = 2x$, mutta miinus?

$$= -\int\frac{-2x}{5-x^2}\,dx = -\ln|5-x^2|+C, \qquad x\neq\pm\sqrt{5}$$

Yleisesti pätee

$$\int f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\,dx = \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C, \qquad f(x)\neq 0\,.$$

c) $$\int\frac{e^{x^{-\frac{1}{3}}}}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\cdot e^{x^{-\frac{1}{3}}}\,dx = \int x^{-\frac{4}{3}}\cdot e^{x^{-\frac{1}{3}}}\,dx\ \ldots$$

Vaikuttaa epäilyttävältä..., mutta kun kerrotaan ykkösellä muodossa $1=-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$, niin havaitaan

$$= \int(-3)\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-\frac{4}{3}}}_{f'(x)}\cdot\underbrace{e^{x^{-\frac{1}{3}}}}_{g'(f(x))}\,dx = -3\cdot e^{x^{-\frac{1}{3}}}+C, \qquad x>0.$$

Muista murtopotenssin määrittelyehto $x>0$ ja vertaa sitä kuutiojuureen! Siis $\sqrt[3]{x}$ on hyvin määritelty $\forall\, x\in\mathbb{R}$, mutta $x^{-\frac{1}{3}}$ vain kun $x>0$.

Tarkistus

$$D\left(-3\cdot e^{x^{-\frac{1}{3}}}+C\right) = -3\cdot e^{x^{-\frac{1}{3}}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-\frac{4}{3}}+0 = e^{x^{-\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \text{OK}\,.$$

Yleisesti pätee

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + C\,.$$

Huomautus Muistakaa yleisesti määrittelyehdot, esimerkiksi

$$\int \frac{x^2}{1-x^3}\, dx = -\frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C, \qquad x \neq 1,$$

Eli logaritmeja ei ole määritelty, kun muuttujalauseke on nolla.