INTEGRAALILASKENTA, MAA9

Yleisiä integroimissääntöjä

Integroiminen eli annetun funktion f integraalifunktion F määrittäminen (löytäminen) on yleisesti haastavaa. Joskus joutuu jopa arvata tai kokeilla. Mutta:

Oli keino mikä hyvänsä, aina voi tarkistaa menikö oikein, nimittäin derivoidaan saatu integraalifunktio F.

Derivoinnin avulla voidaan osoittaa seuraavat integroimissäännöt:

1. $\int k\,dx = kx + C$, vakion k integraali. **Huom** $\int dx = \int 1\,dx$

Esim.

$$\int \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{17}}_{F'(x)} dx = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{17}\cdot x}_{F(x)} + C \longleftarrow$$

Suoran yhtälö, kulmakerroin $\frac{\sqrt{\pi}}{17}$, kk. vastaa suoran derivaattaa.

2. $\int k\cdot g(x)\,dx = k\cdot\int g(x)\,dx = k\cdot(G(x)+C) = k\cdot G(x) + \underbrace{k\cdot C}_{=\text{vakio}}$

$= k\cdot G(x) + C'$, vakiotekijäin siirto ohi int.merkin.

Esim.

$$\int 5\cdot x^3\,dx = 5\cdot\int x^3\,dx = 5\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot x^4 + C\right) = \frac{5}{4}\cdot x^4 + C'.$$

3. $\int\big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C$, summan integraali on yhteenlaskettavien, $f(x)$:n ja $g(x)$:n, integraalien summa. MUTTA!!! Tulon integraali ei ole integraalien tulo.

Kohdat **2.** ja **3.** yhdistäen saadaan: polynomifunktio sekä alkeisfunktioista muodostettu summafunktio voidaan integroida termeittäin.

4. $\int\left(4f(x) + \frac{1}{5}g(x) - \sqrt{17}h(x) + 18\,000k(x) + \ldots + m(x)\right)dx =$

$4\int f(x)\,dx + \frac{1}{5}\int g(x)\,dx - \sqrt{17}\int h(x)\,dx + 18000\int k(x)\,dx + \ldots + \int m(x)\,dx.$

Esim.

$$\int(5\cdot 2x^2 + 17x^{16} - 3e^{3x})\,dx = \frac{10}{3}x^3 + x^{17} - e^{3x} + C\,.$$

Tarkistus/todistus Derivoidaan

$$D\left(\frac{10}{3}x^3 + x^{17} - e^{3x} + C\right) = 10x^2 + 17x^{16} - 3e^{3x}, \qquad \text{OK}$$

5.Potenssifunktion $f: f(x) = x^a$, kun $a \in \mathbb{N}, a \neq -1$ integroimiskaava:

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \qquad a \in \mathbb{N}, a \neq -1$$

ja kun $a = -1$, niin

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0\,.$$

Tarkistus/todistus Derivoi tai katso kirja.

Huomautus *Differentiaali* dx voidaan merkitä myös osoittajaan tekijäksi.

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x) \cdot dx}{f(x)}$$

Huomautus Muista juurilausekkeiden laskumenetelmä: muutetaan murtopotenssimuotoon → tehdään ”temput” (esim. sievennykset tai integrointi) → palataan juurimuotoon.

Esimerkki

$$\int 5x \cdot \sqrt[4]{x^3} \, dx = 5 \int x \cdot x^{\frac{3}{4}} \, dx = 5 \int x^{\frac{7}{4}} \, dx = 5 \cdot \frac{1}{\frac{7}{4} + 1} x^{\frac{7}{4}+1}$$

$$= 5 \cdot \tfrac{4}{11} x^{\frac{11}{4}} = \tfrac{20}{11} \cdot x^{\frac{11}{4}} = \tfrac{20}{11} \cdot \sqrt[4]{x^{11}}\,.$$

Tarkastellaan vielä tapausta $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Aiemmin: …integraalifunktio määriteltiin jollakin välillä I.

Nyt esimerkiksi funktio f: $f(x) = \frac{1}{x}$ ei ole määritelty kohdassa $x = 0$.

Täsmällisesti, pitäisi siis integroida erikseen väleillä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$.

Kun $x > 0$:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \overset{x>0}{=} \ln x + C\,.$$

Kun $x < 0$:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + D \overset{x<0}{\widehat{=}} \ln(-x) + D\,.$$

Huomautus Vakioiden C ja D ei tarvitse olla samoja (ja harvoin ne ovatkin). Esimerkiksi, jos on annettu alkuehto $F(e) = 6$, niin tällöin

$$F(e) = \ln(e) + C = 6 \quad \Rightarrow \quad C = 5,$$

mutta D on vapaa.
Lisäksi vakioita voi merkitä joko C, D, E, jne. tai C_1, C_2, C_3, jne.

Tapana on pitää luvallisena esitystä

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0$$

ja vakion C arvot valitaan väleillä $]-\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$ toisistaan riippumattomalla tavalla.
Edellä käyty tarkastelu ei vain $\frac{1}{x}$:lle, vaan kaikille funktioille, joilla nimittäjän nollakohta, kuten $\frac{1}{x^4}, \frac{1}{x+2}, \frac{1}{5-x}$, jne.

Lopuksi: Milloin funktiolla f sitten ylipäänsä on integraalifunktio? Onko integraalifunktiota aina edes olemassa?

Lause, integraalifunktion $\boldsymbol{F}$ jatkuvuus ja olemassaolo:
Jokaisella jatkuvalla funktiolla f on integraalifunktio F. Tämä integraalifunktio on aina jatkuva.

Todistus Eka lause vaikeahko → sivuutetaan. Toinen seuraa siitä, että koska määritelmän mukaan $F' = f$, niin tällöin F on myös jatkuva.

Huomautus Myös epäjatkuvalla funktiolla f voi olla integraalifunktio, tosin nämä ovat harvinaisia tapauksia → katso moniste, jossa tarkastellaan funktiota (myöhemmin, paloittaisen funktion integraali)

$$f : f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}.$$

Läheskään aina ei osata määrittää jatkuvienkaan funktioiden integraalifunktioita ns. alkeisfunktioiden avulla. Esimerkiksi, jos f on muotoa

$$e^{x^2} \qquad \text{tai} \qquad \sqrt{1 + x^3}, \qquad \text{niin mitä on } F?$$

Esimerkkejä

a)

$$\int \frac{\sqrt{x}-x}{x}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}-x}{x}\,dx = \int (x^{-\frac{1}{2}}-1)\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} - x + C\,.$$

b) Käyrän pisteeseen (x,y) piirretyn tangentin kulmakerroin on $2x+1$. Muodosta käyrän yhtälö, kun lisäksi tiedetään käyrän kulkevan pisteen $(-3,0)$ kautta.

Tangentin kk. pisteessä (x,y) on $2x+1$, eli derivaatta pisteessä (x,y) on $2x+1$. Näin ollen kysytyn käyrän yhtälö saadaan integroimalla derivaattaa, siis

$$F(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x+1)\,dx = x^2 + x + C\,.$$

Lisäksi tiedetään, että $F(-3)=0$, eli

$$F(-3) = (-3)^2 + (-3) + C = 6 + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -6\,.$$

Käyrän yhtälö on

$$y = y(x) = x^2 + x - 6\,.$$

Esimerkki

Osoita, että funktio $f\colon f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, \ \text{kun } x \neq 0 \\ 0, \ \text{kun } x = 0 \end{cases}$ on kaikkialla derivoituva, mutta f' on epäjatkuva kohdassa $x=0$.

Derivoituvuus kaikkialla:

Kun $x \neq 0$: Tällöin suora derivointi antaa

$$Dx^2\sin\tfrac{1}{x} = 2x\sin\tfrac{1}{x} + x^2\cos\tfrac{1}{x}\left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\tfrac{1}{x} - \cos\tfrac{1}{x}\,,$$

eli derivaatta f' on olemassa.

Kun $x = 0$: Määritelmä antaa

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \overbrace{\sin\tfrac{1}{x}}^{\in[-1,1]} = 0\,,$$

koska sini-funktio on rajoitettu. Eli f' on olemassa myös, kun $x=0$.

Derivaatan epäjatkuvuus kohdassa $x = 0$:

Osoitetaan, että raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\tfrac{1}{x} - \cos\tfrac{1}{x}\right)$$

ei ole olemassa.

Tehdään vastaoletus, että on olemassa. Koska $f'(x)$:n lausekkeen perusteella

$$\cos\tfrac{1}{x} = 2x\sin\tfrac{1}{x} - f'(x)$$

kaikilla $x \neq 0$, niin saadaan

$$\lim_{x\to 0}\cos\tfrac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\tfrac{1}{x} - f'(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\tfrac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 0} f'(x)$$

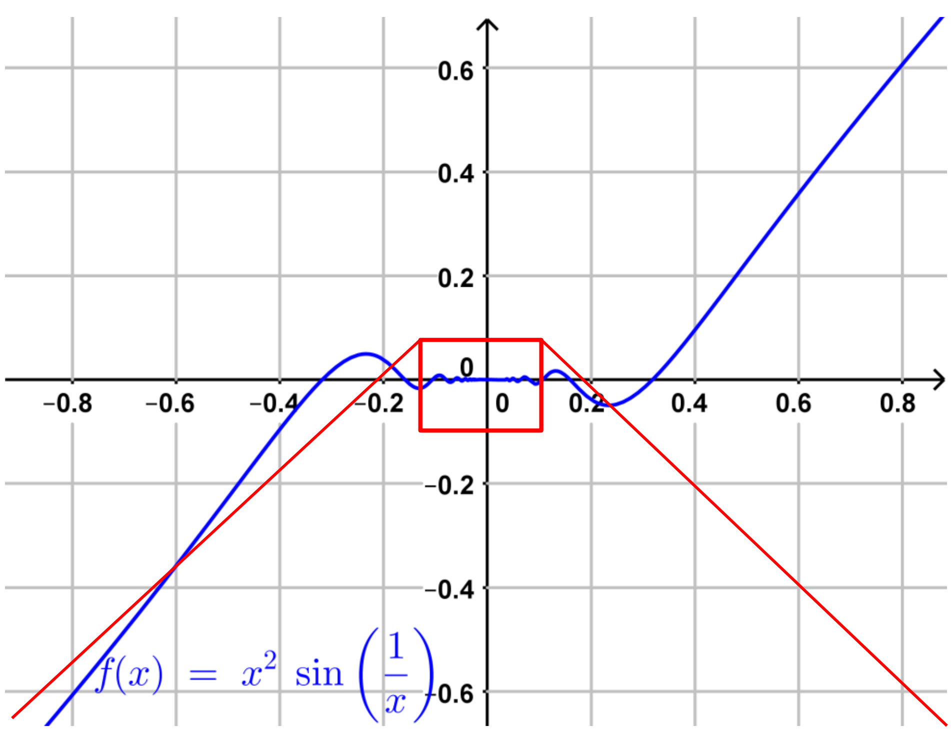
$$= 0 - \lim_{x\to 0} f'(x) = -\lim_{x\to 0} f'(x)\ .$$

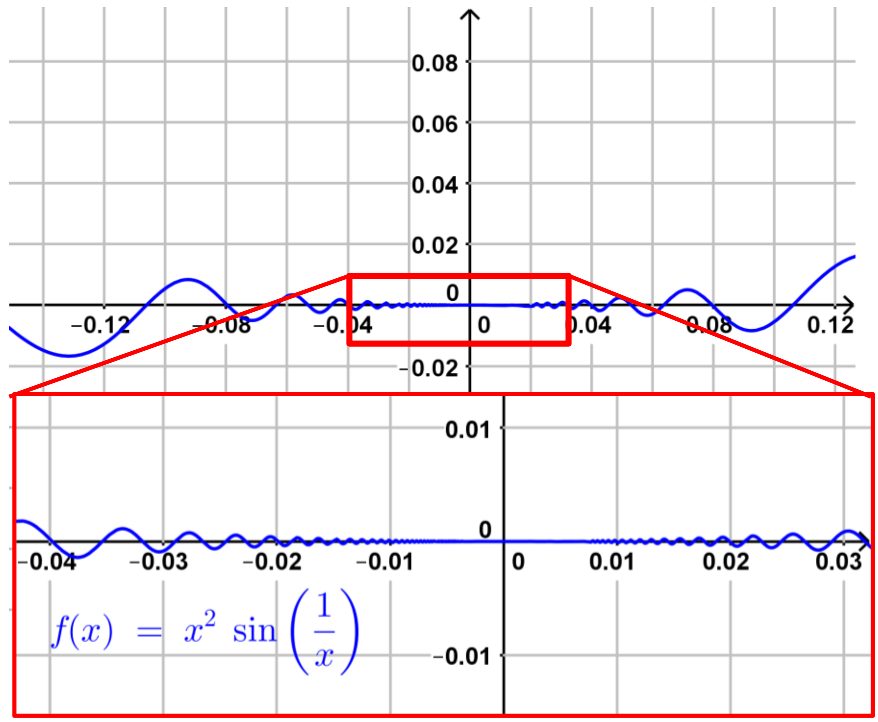
Tämä on ristiriita, sillä edellä käydyn nojalla

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0, \qquad \text{eli on olemassa,}$$

mutta raja-arvoa $\lim_{x\to 0}\cos\tfrac{1}{x}$ ei ole olemassa.

HUOM! Integraalifunktion määritelmässä riittää, että F on derivoituva ja $F'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}/I$.Näin ollen F':n jatkuvuutta **ei** vaadita. Sen sijaan F **on** aina jatkuva (koska on derivoituva).
Yllä olevassa esimerkissä valitse $F = f$ ja $F' = f'$.





Huomaa, kuinka funktio f heilahtelee käyrien $y = x^2$ ja $y = -x^2$ välissä.