Johdantoa

Lyhyehkö johdanto integraalilaskentaan.

Integraalilaskennan lähtökohta 1:

Laskutoimitukset $+$ ja $-$ ovat keskenään käänteisiä, samoin $\cdot$ ja $\div$ ovat käänteisiä, kunhan ei jaeta nollalla. Edelleen operaatiot x^n ja $\sqrt[n]{x}$ tai a^x ja $\log_a x$ ovat käänteisoperaatioita toisilleen (määrittelyehdot huomioiden).

Differentiaalilaskennan alkuaikoina, noin 1600 – 1700, opittiin määrittämään hetkellisiä muutoksia (muutosnopeuksia), eli osattiin derivoida. → Luontevaa olikin kysyä: ”Jos derivaattafunktio tiedetään, niin mistä funktiosta se on saatu”.

Eli mikä olisi käänteinen laskutoimenpide derivoimiselle?

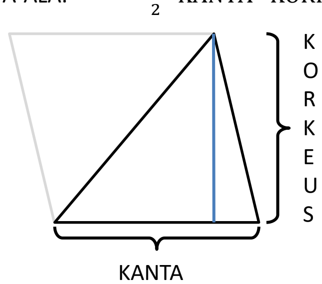
$$f' \quad \text{tunnettu} \quad \rightarrow \quad \text{mikä on} \quad f \quad ?$$

Integraalilaskennan lähtökohta 2:

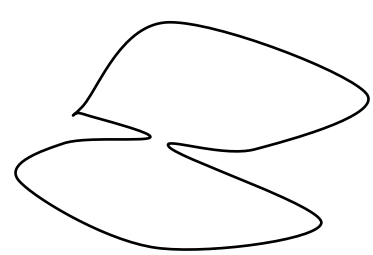
Jo antiikin aikoina osattiin määrittää geometristen muotojen ja kappaleiden pinta-aloja/tilavuuksia, kunhan muodoissa/kappaleissa oli jonkinlaista symmetriaa tai se voitiin palauttaa symmetriseksi. Esimerkiksi mielivaltainen kolmio voitiin täydentää suunnikkaaksi jne. → Mutta annetun mielivaltaisen muodon pinta-ala tai tilavuus tuotti haastetta ja niinpä sellaisten tapauksissa tyydyttiin arvioihin.

Eli mikä on mielivaltaisen muodon/kappaleen pinta-ala/tilavuus?

PINTA-ALA: $\frac{1}{2} \cdot \text{KANTA} \cdot \text{KORKEUS}$



PINTA-ALA: ÖÖÖ…ei edes laskin tiedä.



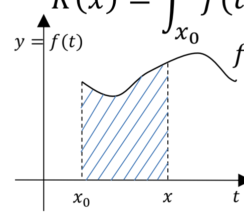
Integraalilaskenta

Määräämätön

- Etsitään funktiota
- Derivoinnille käänteistoimenpide → ”integroiminen”
- Integraalifunktio $F(x)$, jolle
  $$F'(x) = f(x),$$
  lisäksi integraalifunktioille
  $$G(x) = F(x) + C.$$
- Vakion C lisäys (merkitys), kun
  $$G(x) = F(x) + C$$
  niin
  $$G'(x) = F'(x)$$

Määrätty

- Etsitään reaalilukua
- Pinta-alan/tilavuuden ratkaiseminen tai määrittäminen
- Välin jako ja porrasfunktiot → arviointi ja rajankäynti, jolloin
  $$\sum \to \int \quad , \qquad \Delta x \to dx$$
- Kertymäfunktion määritelmä
  $$K(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$



Kertynyt pinta-ala vastaa funktion K arvoa, tässä viivoitettu pinta-ala on funktion K arvo $K(x)$ muuttujan t arvolla x.

Havainto: $K(x)$ on eräs f:n integraalifunktio, eli…

ANALYYSIN PERUSLAUSE

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt$$

Lukiomatematiikan yksi tärkeimmistä (ellei peräti tärkein) yhtälöistä ja kurssin päätulos, joka todistetaan myöhemmin. (HUOM! Emme ollenkaan ole vielä pohtineet ko. funktioiden olemassaoloa, jatkuvuutta jne., joten mielenkiintoisia asioita on tiedossa.)

Derivoinnin kertausta

Derivoi:

a) $3x^4 - 5x^{-7} + \sqrt{x}$: $D(3x^4 - 5x^{-7} + \sqrt{x}) = \ldots$

b) 2^{-x} : $D(2^{-x}) = \ldots$

c) $\sqrt{f(x)}$, kun tiedetään, että f' on olemassa kaikilla x :

$D\left(\sqrt{f(x)}\right) = \ldots$ TAI määritelmän kautta

d) Osoita, että derivoituva funktio on myös jatkuva. Eli implikaatio

$$f' \text{olemassa} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ jatkuva}$$

pätee aina. Muista, että implikaatio toisen suuntaan ei päde, siis

$$f \text{ jatkuva} \quad \not\Rightarrow \quad f' \text{ olemassa}$$

Tästä esimerkkinä käy itseisarvofunktio kohdassa $x_0 = 0$.

Kotitehtävät

Derivoi:

a) $3e^{x^3} - 7x$ **b)** $|\sin x|$ **c)** 4^x **d)** $x^{-\frac{5}{3}} \cdot 2x^3,\ x > 0$ **e)** $\frac{f'}{g}$, missä f ja g ovat kahdesti jatkuvasti derivoituvia funktioita, eli $f, g \in C^2$. Jatkuvasti derivoituva tarkoittaa, että funktiot ovat derivoituvia ja derivaatat ovat jatkuvia. Lisäksi $g \neq 0$.

Derivoi määritelmän kautta:

a) $2x^3$ **b)** $\sqrt{x}$

Integraalifunktio

Kun halutaan määrätä funktio, jonka derivaatta tunnetaan, niin kyseistä toimenpidettä sanotaan *integroimiseksi* ja saatua funktiota *integraalifunktioksi*.

Määritelmä, integraalifunktio:
Olkoon funktio f hyvin määritelty välillä $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ (hyvin määriteltävyys tarkoittaa, ettei esim. jaeta nollalla). Jos on olemassa sellainen funktio F, jolle $\forall x \in I$ pätee

$$F'(x) = f(x),$$

niin F on funktion f integraalifunktio tai lyhyesti f:n integraali.

HUOM
- Koska integraalifunktio F on määritelmän nojalla derivoituva $\forall x \in I$, niin edellä käydyn todistuksen myötä F on jatkuva $\forall x \in I$. Huomaa, ettei funktion $f = F'$ jatkuvuudesta tiedetä mitään. Vain se, että f on määritelty välillä I.
- Jos $I = \mathbb{R}$, niin väliä I ei tavallisesti mainita.

Esimerkkejä:

a) Funktio F: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ on funktion f: $f(x) = x^2$ integraalifunktio, koska $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + 0 = x^2 = f(x)$$

b) Onko F: $F(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$ funktion $f: f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ integraalifunktio, kun $x > 1$?
VASTAUS: On, sillä

$$F'(x) = \frac{1}{x-1} \cdot 1 - \frac{1}{x+1} \cdot 1 = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1} = f(x)$$

c) Funktio F: $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ ei ole funktion $f: f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ integraalifunktio, koska

$$DF(x) = D\left(\sqrt{x^2+1}\right) = D(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \neq \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

Tarkastellaan esimerkkiä a) tarkemmin. Koska vakion ($\in \mathbb{R}$) derivaatta on nolla, niin myös funktio G: $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 7$ on funktion f: $f(x) = x^2$ integraalifunktio, koska

$$G'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 + 0 = x^2 = f(x).$$

Selvästikään ei ole väliä vakion arvolla, joten pätee tulos:

Lause, annetun funktion integraalifunktiot:
Olkoon f määritelty välillä I (voi olla koko $\mathbb{R}$). Jos F on funktion f eräs integraalifunktio ja $C \in \mathbb{R}$ vakio, niin f:n *kaikki integraalifunktiot ovat tällöin muotoa* $F + C$. Vakiota C sanotaan integroimisvakioksi.
Esimerkki
Olkoon $G(x) = F(x) + C \implies G'(x) = F'(x) = f(x) \implies G$ on f:n integraalifunktio. Saadaan ns. parvi integraalifunktioita → kirjan kuvat.

Herää tietysti kysymys: ”Onko olemassa vielä muita f:n integraali-funktioita, kuin muotoa $G = F + C$ olevat?”

VASTAUS: Ei ole. Todistus…ois kiva käydä nyt…, mutta jätetään väliin. Vaatii väliarvolausetta → kurssi 13, ehkäpä sit kurssilla 13. Todistus kuitenkin nojautuu integraalilaskennan peruslauseeseen, joka kuuluu (Huom! Ei ole sama kuin analyysin peruslause, älä sekoita.)

Lause, integraalilaskennan peruslause:
Olkoon funktio h jatkuva suljetulla *välillä* $[a, b]$ ja derivoituva vastaa-valla avoimella välillä $]a, b[$. Jos $h'(x) = 0\ \forall x \in]a, b[$, niin h on vakio-funktio välillä $[a, b]$. Jos ei väliä, niin tulos ei päde, h: $h(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0 \end{cases}$

Eli jos nyt G ja F ovat f:n integraalifunktioita, niin ne ovat määritelmän nojalla jatkuvia ja täten myös erotusfunktio $G - F =: h$ on jatkuva. Lisäksi

$$D\overbrace{\big(G(x) - F(x)\big)}^{=h(x)} = \overbrace{G'(x) - F'(x)}^{=h'(x)} \overset{\substack{G,F \text{ ovat } f\text{:n} \\ \text{int.funk.}}}{=} f(x) - f(x) = 0,$$

joten $G - F = h$ on vakiofunktio, toisin sanoen

$$G(x) = F(x) + C,$$

ja näin ollen ei ole muita kuin aiemmin saadut integraalifunktiot.

”Väli-jutut” hoituu oletuksen ”G ja F ovat f:n integraalifunktioita” myötä kuntoon.

Summa summarum: Annetun funktion f kaikkien integraalifunktioiden löytämiseksi riittää, että löydetään jokin integraalifunktio F. Muut ovat muotoa G: $G(x) = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Tälle on annettu oma merkintätapa, luetaan: ”*integraali fxdx*”

$$\int f(x)\,dx = \boxed{F(x) + C,} \qquad C \in \mathbb{R}$$

Määräämätön eli yleinen integraali

Merkintä tulee määrätyn integraalin laskennasta:

$$\sum \rightarrow \int$$

Integroitava funktio eli *integrandi*

Integroimismuuttuja, jonka suhteen integroidaan, esim.

$$\int f(x,y)\,dx\text{:} \int 2xy^2\,dx = x^2y^2 + C$$

$$\int f(x,y)\,dy\text{:} \int 2xy^2\,dy = \frac{2}{3}xy^3 + C$$