Matematiikan kurssikoe, Maa 9 – Integraalilaskenta – RATKAISUT **Sievin lukio**
Torstai 22.2.2018

A-OSA

1. a) Integroi välivaiheineen

$$\text{i)} \int \left(2x - \frac{1}{t}\right) dt \qquad \text{ii)} \int_1^2 \sqrt{2x-1}\, dx\,.$$

b) Määrittele integraalifunktio.

c) i) Olkoon

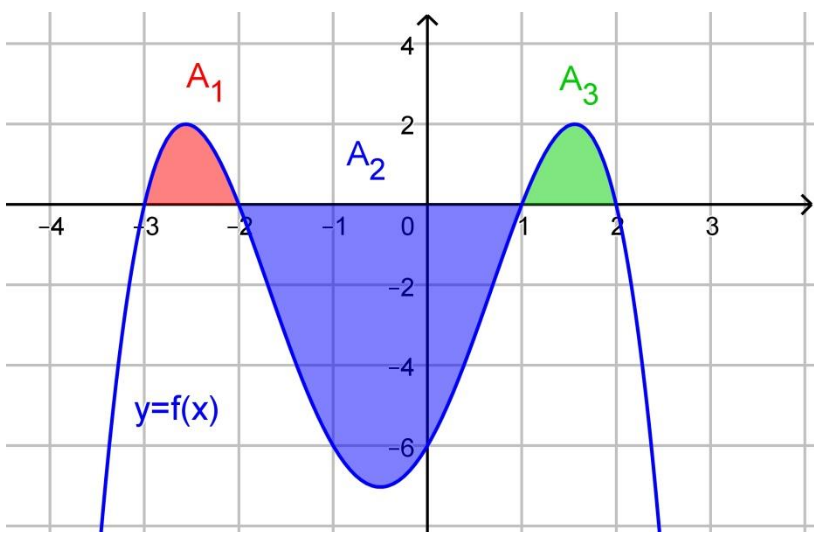
$$\int_3^5 f(x)\,dx = -3, \quad \int_5^7 f(x)\,dx = 2, \quad \int_7^3 g(x)\,dx = 7\,.$$

Määritä

$$\int_3^7 \left(2 \cdot f(x) - \frac{1}{2} \cdot g(x)\right) dx\,.$$

ii) Kuvioon merkityt pinta-alat ovat $A_1 = A_3 = 1,32$ ja $A_3 = 13,05$. Määritä pinta-alojen ja funktion f kuvaajan avulla

$$1) \int_{-3}^1 f(x)\,dx \qquad 2) \text{ funktion } f \text{ integraalifunktion } F \text{ arvon muutos välillä } [-\frac{1}{2}, 2].$$



a) Saadaan

$$\text{i)} \int \left(2x - \frac{1}{t}\right) dt = 2xt - \ln t + C$$

$$\text{ii)} \int_1^2 \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 2 \cdot \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 2 \cdot (2x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underset{1}{\overset{2}{/}} \frac{2}{3} \cdot (2x-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left[(2 \cdot 2 - 1)^{\frac{3}{2}} - (2 \cdot 1 - 1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[(3)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[3\sqrt{3} - 1\right] = \sqrt{3} - \frac{1}{3}$$

b) Olkoon funktio f määritelty tietyllä välillä. Jos on olemassa sellainen funktio F, että välin kaikissa pisteissä pätee $F'(x) = f(x)$, niin funktiota F sanotaan funktion f *integraalifunktioksi*.

c) i) Määrätyn integraalin ominaisuuksista ja annetuista tiedoista saadaan

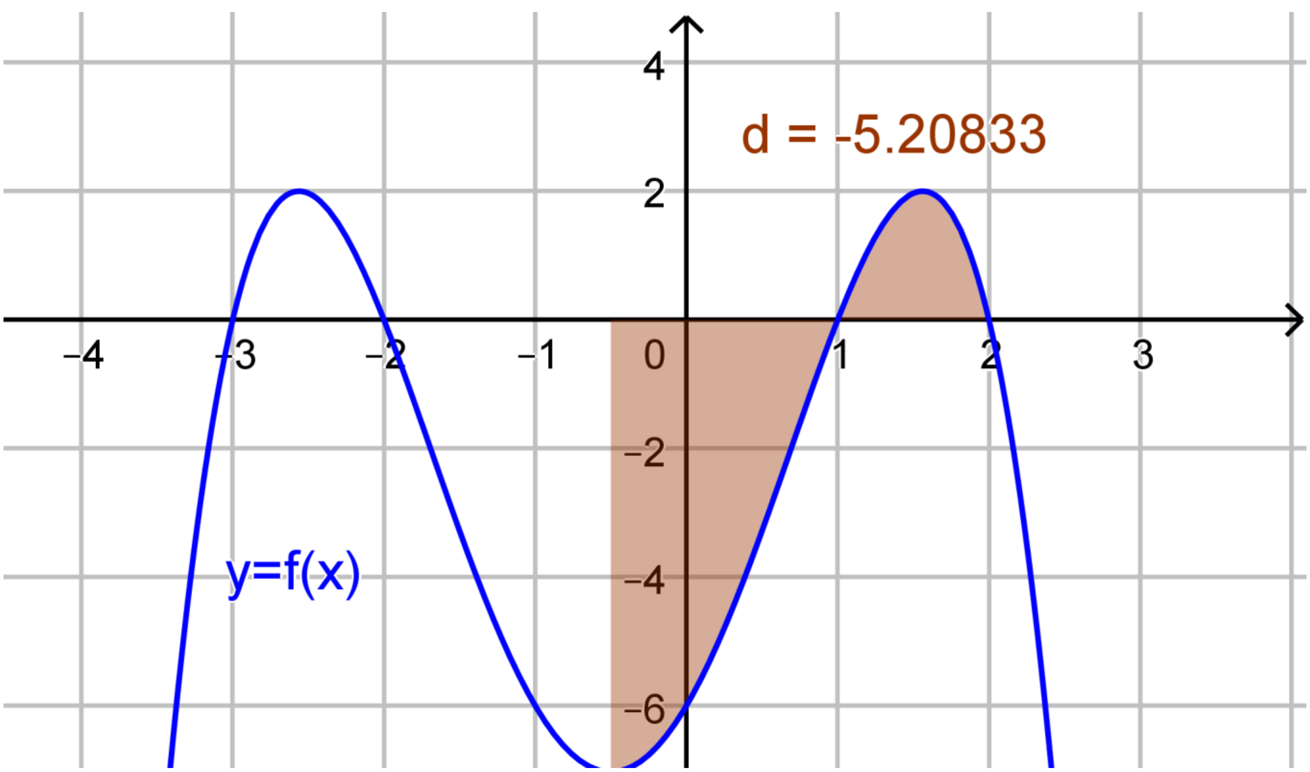
$$\int_3^7 \left(2 \cdot f(x) - \frac{1}{2} \cdot g(x)\right) dx = 2 \cdot \int_3^7 f(x)\,dx - \frac{1}{2} \cdot \int_3^7 g(x)\,dx = 2 \cdot \left(\int_3^5 f(x)\,dx + \int_5^7 f(x)\,dx\right) + \frac{1}{2} \cdot \int_7^3 g(x)\,dx$$

$$= 2 \cdot \left(\int_3^5 f(x)\,dx + \int_5^7 f(x)\,dx\right) + \frac{1}{2} \cdot \int_7^3 g(x)\,dx = 2 \cdot (-3+2) + \frac{1}{2} \cdot 7 = -2 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$$

ii) Saadaan kuvan tiedoista

1) $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 1{,}32 - 13{,}05 = -11{,}73$

2) $\displaystyle F(2) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx = -6{,}525 + 1{,}32 = -5{,}205.$



2. a) Määritä se funktion $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f(x) = |x-3|}$ integraalifunktio, joka leikkaa $\boldsymbol{x}$-akselin kohdassa $\boldsymbol{4}$. Hahmota funktion $\boldsymbol{f}$ kuvaaja (esim. Libren Draw-ohjelmalla, kuvan ei tarvitse olla "täydellinen") (5p)

b) Laske $\boldsymbol{F(-1)}$. (1p)

a) Nyt funktio f on itseisarvofunktiona jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten integraalifunktio F on olemassa. Lisäksi f on paloittain määritelty, sillä

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{kun } x-3 \geq 0 \text{ eli kun } x \geq 3 \\ -(x-3), & \text{kun } x-3 < 0 \text{ eli kun } x < 3 \end{cases}.$$

Näin ollen

$$F(x) = \begin{cases} \int (x-3)\,dx, & \text{kun } x \geq 3 \\ \int (3-x)\,dx, & \text{kun } x < 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3x + C_1, & \text{kun } x \geq 3 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + C_2, & \text{kun } x < 3 \end{cases}.$$

Integraalifunktion on oltava jatkuva kaikkialla (koska se on määritelmän perusteella derivoituva), joten tarkastellaan jatkuvuutta kohdassa $x = 3$. Täytyy siis olla

$$\lim_{x \to 3-} F(x) = \lim_{x \to 3+} F(x) = F(3)$$

eli

$$\lim_{x \to 3-} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x + C_2\right) = \lim_{x \to 3+} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + C_1\right) = F(3)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 9 + C_2 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 9 + C_1$$

$$C_2 = 4{,}5 - 9 + C_1 + 4{,}5 - 9 = C_1 - 9$$

Siis integraalifunktioksi tulee (nyt vain yksi integroimisvakio mukana!)

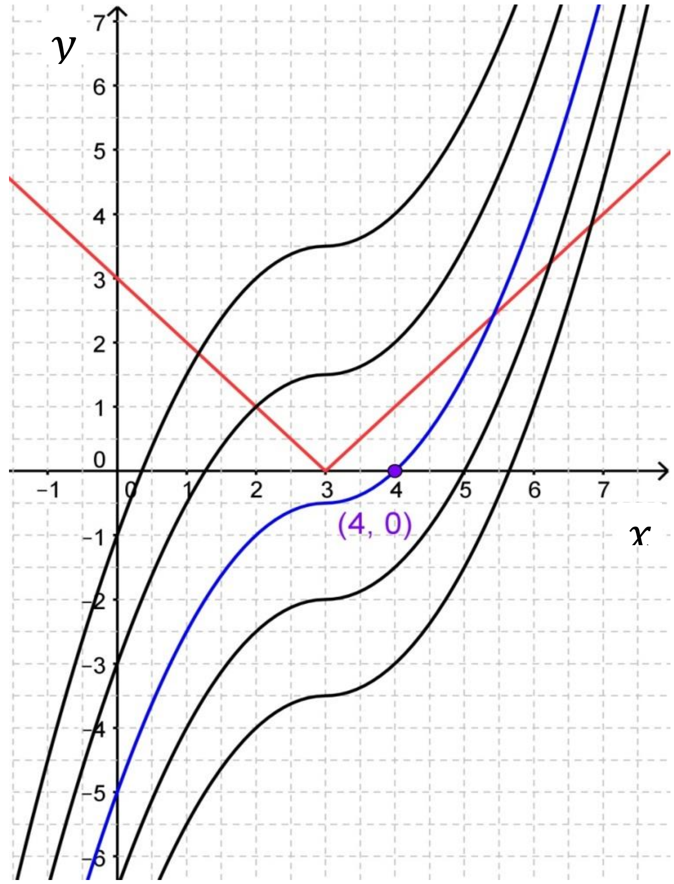
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3x + C_1, & \text{kun } x \geq 3 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + C_1 - 9, & \text{kun } x < 3 \end{cases} \left(\underbrace{= \frac{1}{2}(x-3)|x-3| + C'}_{\text{tätä ei vaadita}}\right).$$

Vielä pitää etsiä se tietty integraalifunktio, joka kulkee pisteen (4,0) kautta. Toisin sanoen integraalifunktion arvo kohdassa $x = 4$ on 0, eli $F(4) = 0$. Pitää valita oikea lauseke, koska integ.funk. on paloittain määritelty. Valitaan vaihtoehdoista ($x \geq 3$ tai $x < 3$) se lauseke, jolla $x = 4$ toteutuu, eli lauseke $\frac{1}{2}x^2 - 3x + C_1$, saadaan

$F(4) = \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + C_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 4,$

ja loppujen lopuksi kysytty integraalifunktio on (katso myös kuvat)

$$F(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + 4, & \text{kun } x \geq 3 \\ -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 5, & \text{kun } x < 3 \end{cases}$$



Punaisella on piirretty funktio

$$f : f(x) = |x - 3|$$

Mustalla on piirretty integraalifunktioita F vakion C_1 arvoilla 1, $\frac{5}{2}$, 6, 8, ja sinisellä on piirretty tehtävässä määritetty integraalifunktio ($C_1 = 4$).

b) Koska $x = -1 < 3$, niin arvon $F(-1)$ laskemiseksi valitaan $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$. Saadaan

$$F(-1) \;=\; -\frac{1}{2}(-1)^2 + 3(-1) - 5 = -\frac{1}{2} - 8 = -8\frac{1}{2}.$$

B-OSA

3. a) Funktion f toisen kertaluvun derivaatta $f''(x) = -4\sin 2x - 4\cos 2x$. Lisäksi tiedetään, että

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \quad \text{ja} \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Määritä $f(x)$ sekä $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Piirrä ja liitä vastaukseesi funktion f kuvaaja väliltä $[-2\pi, 3\pi]$.

b) Laske ensimmäisessä neljänneksessä olevan yksikköympyrän $x^2 + y^2 = 1$ pinta-alan likiarvo muodostamalla keskiarvo $\frac{1}{2}(s_{10} + S_{10})$, missä s_{10} vastaa alasummaa ja S_{10} vastaa yläsummaa. Hyödynnä laskinohjelmistoja. Esim. TI laskee hakasulkujen {☐} sisällä useita muuttujien arvoja kerralla, katso kuva alla. Hakasulut saat normaalista hakasulkumerkistä näppäimistöltä.

$2\cdot\{2,3,4,5,6\}$	$\{4,6,8,10,12\}$
$2\cdot\{45,76\}$	$\{90,152\}$

a) Koska $f''(x) = -4\sin 2x - 4\cos 2x$, niin

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (-4\sin 2x + 4\cos 2x)\,dx = 2\cos 2x - 2\sin 2x + C$$

ja koska

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{2\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} - 2\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1} + C = -2}_{\Rightarrow\ C=0}$$

niin $C = 0$. Siis $f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin 2x$. Edelleen koska

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2\cos 2x - 2\sin 2x)\,dx = \sin 2x + \cos 2x + D$$

ja koska

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \underbrace{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}^{=1/3} + \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}^{=\sqrt{3}/2} + D = \frac{\sqrt{3}-1}{2}}_{\Rightarrow\ D=-1}$$

niin $D = -1$. Siis $f(x) = \sin 2x + \cos 2x - 1$. Ja lopuksi

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1\,.$$

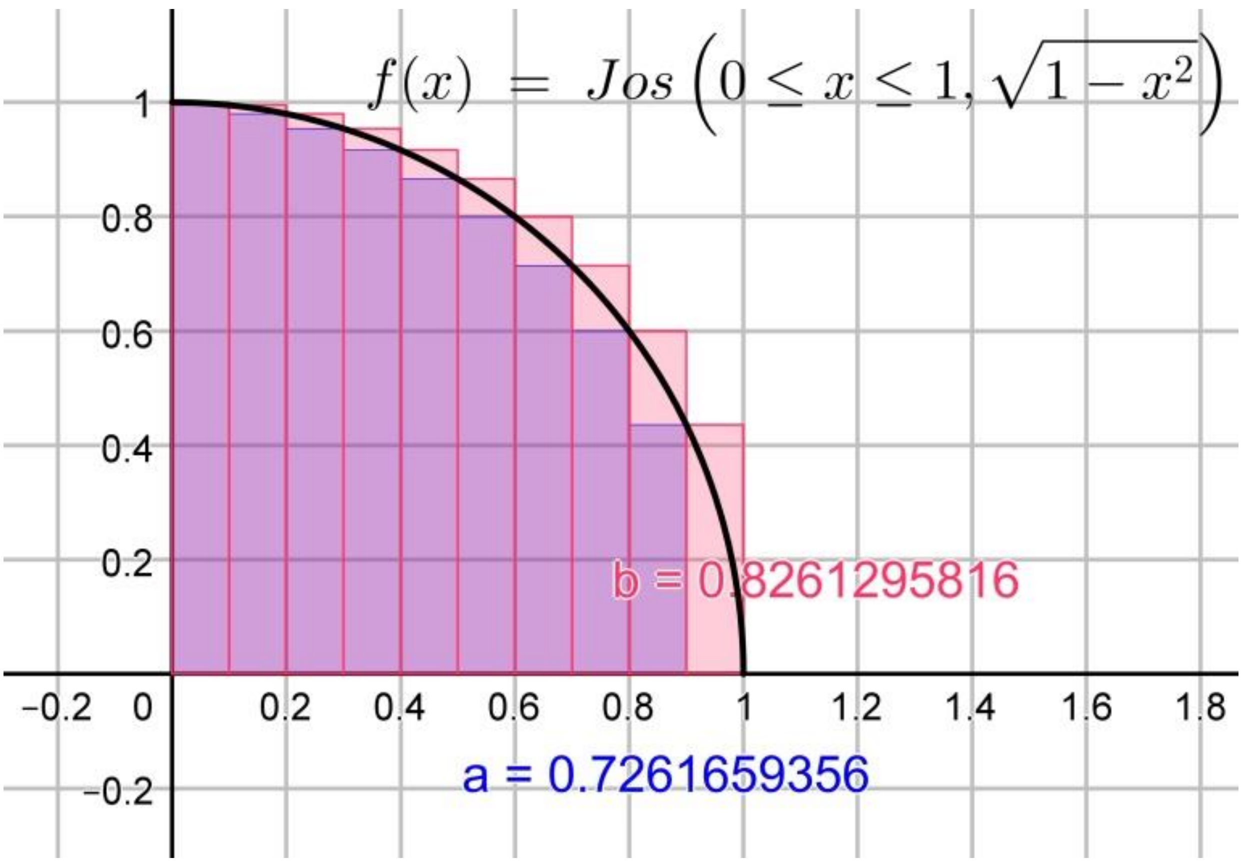
b) Hyödynnetään Geogebran komentoja alasumma ja yläsumma:

Muodostuva funktion lauseke saadaan yksikköympyrästä

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2}$$

Joten (Oikea arvo $A = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853981633974$)

$$\frac{1}{2} \cdot (s_{10} + S_{10}) \approx \frac{1}{2} \cdot (0{,}7261659356419 + 0{,}8261295815617) = 0{,}7761477586018$$



TAI

Laskee arvoja ja muodostaa summat.

4. a) Miten vakio $M > 0$ pitää valita, jotta funktioiden $f\colon f(x) = M \cdot x$ ja $g\colon g(x) = x^2 - 2 \cdot M^2$ kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala on 12? Etsi ensin likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella aineistot-osion geogebra-tiedostoa tehtava2a_bosa.ggb käyttäen ja määritä sitten tarkka arvo algebrallisesti laskien. Perustele välivaiheiden (integrointi on oltava vastauksessa, mutta sijoituksen saa tehdä ohjelmistoilla) avulla. (4p)

b) Keksi jatkuva funktio f, joka ei ole vakiofunktio ja jolle

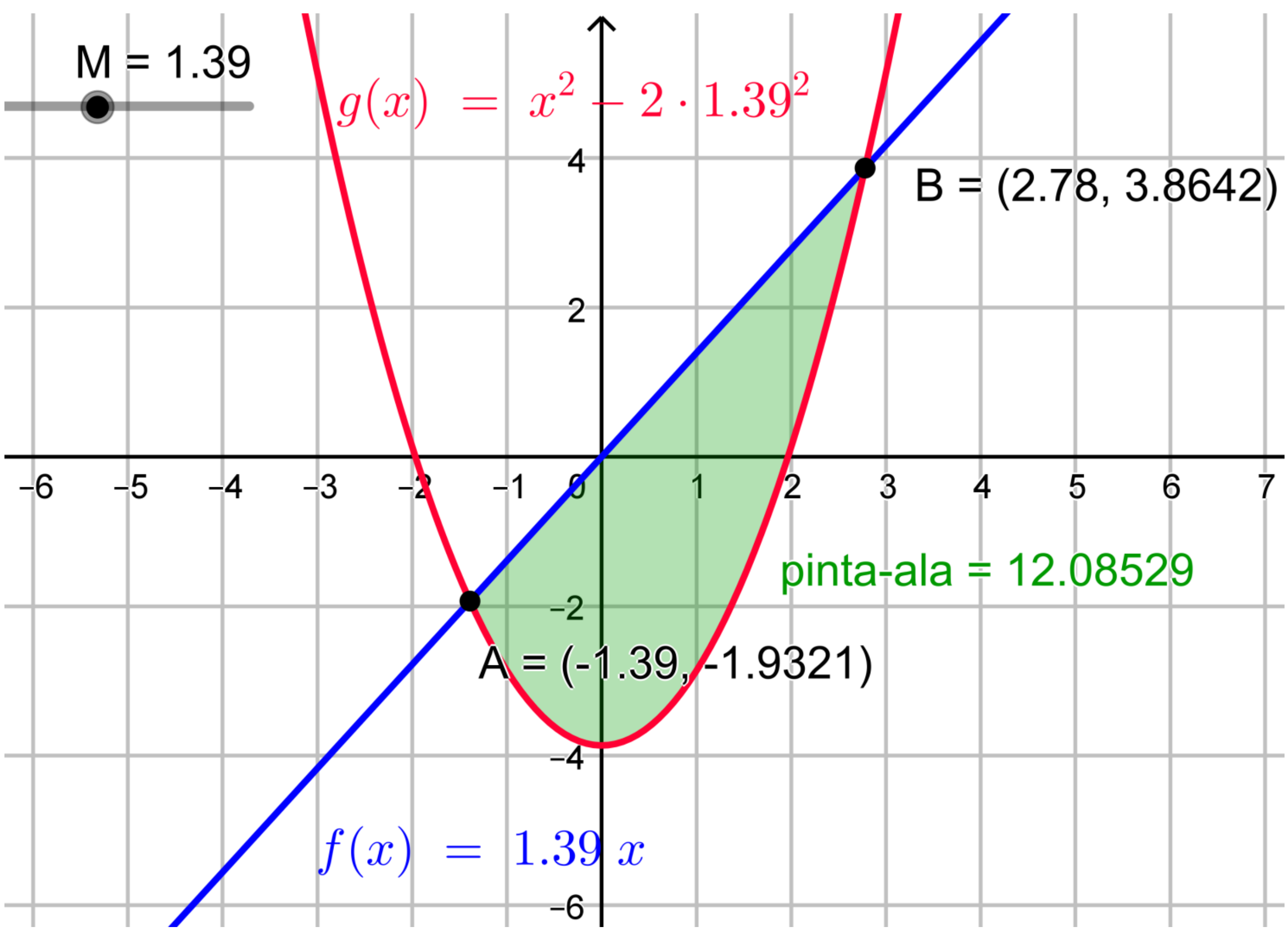
$$\int_1^2 f(x)\,dx = 2$$

ja $f(x) \geq 0$, kun $1 \leq x \leq 2$. Hyödynnä esim. geogebraa. (1p)

c) Määritä välivaiheiden avulla (eli sijoitukset ja laskut pitää olla näkyvillä.)(1p)

$$\int_0^2 12x\sqrt{2x^2+1}\,dx\,.$$

a) Likiarvo $M \approx 1{,}39$. (Arvoa $M \approx -1{,}39$ ei hyväksytä koska tällöin $M < 0$.)



Määritetään ensin käyrien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ leikkauspisteet:

$$y = y \quad \text{eli} \quad Mx = x^2 - 2M^2 \quad \overset{\text{laskin}}{\Longrightarrow} \quad \begin{matrix} x = 2M \\ x = -M \end{matrix}$$

Koska $M > 0$, niin $-M < 2M$. Näin ollen integroimisväliksi tulee $[-M, 2M]$. Tällä välillä paraabeli eli käyrä $y = x^2 - 2M^2$ aukeaa ylöspäin, joten paraabeli kulkee suoran $y = Mx$ alapuolella. Näin ollen saadaan

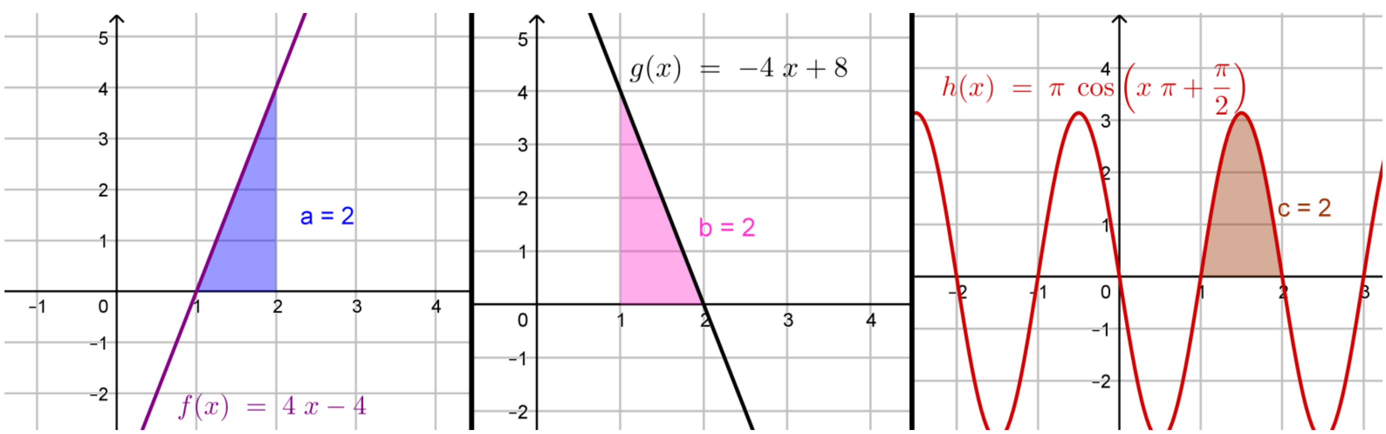
$$\int_{-M}^{2M} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-M}^{2M} [Mx - (x^2 - 2M^2)]\, dx = \int_{-M}^{2M} [-x^2 + Mx + 2M^2]\, dx$$

$$= \Big/_{-M}^{2M} -\frac{1}{3}x^3 + \frac{M}{2}x^2 + 2M^2x = \ \dots \ = \frac{9}{2}M^3$$

Lopuksi määritetään vakio M, niin että määrätty integraali saa arvon 12. Siis

$$\frac{9}{2}M^3 = 12 \quad \Longrightarrow \quad M = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \approx 1{,}39$$

b) Esimerkiksi funktio $f: f(x) = 4x - 4$ tai $g: g(x) = -4x + 8$ tai $h: h(x) = \pi \cos\left(x\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Katso kuvat:



tai $k: k(x) = x^2 - \frac{1}{3}$

c) Lasku antaa

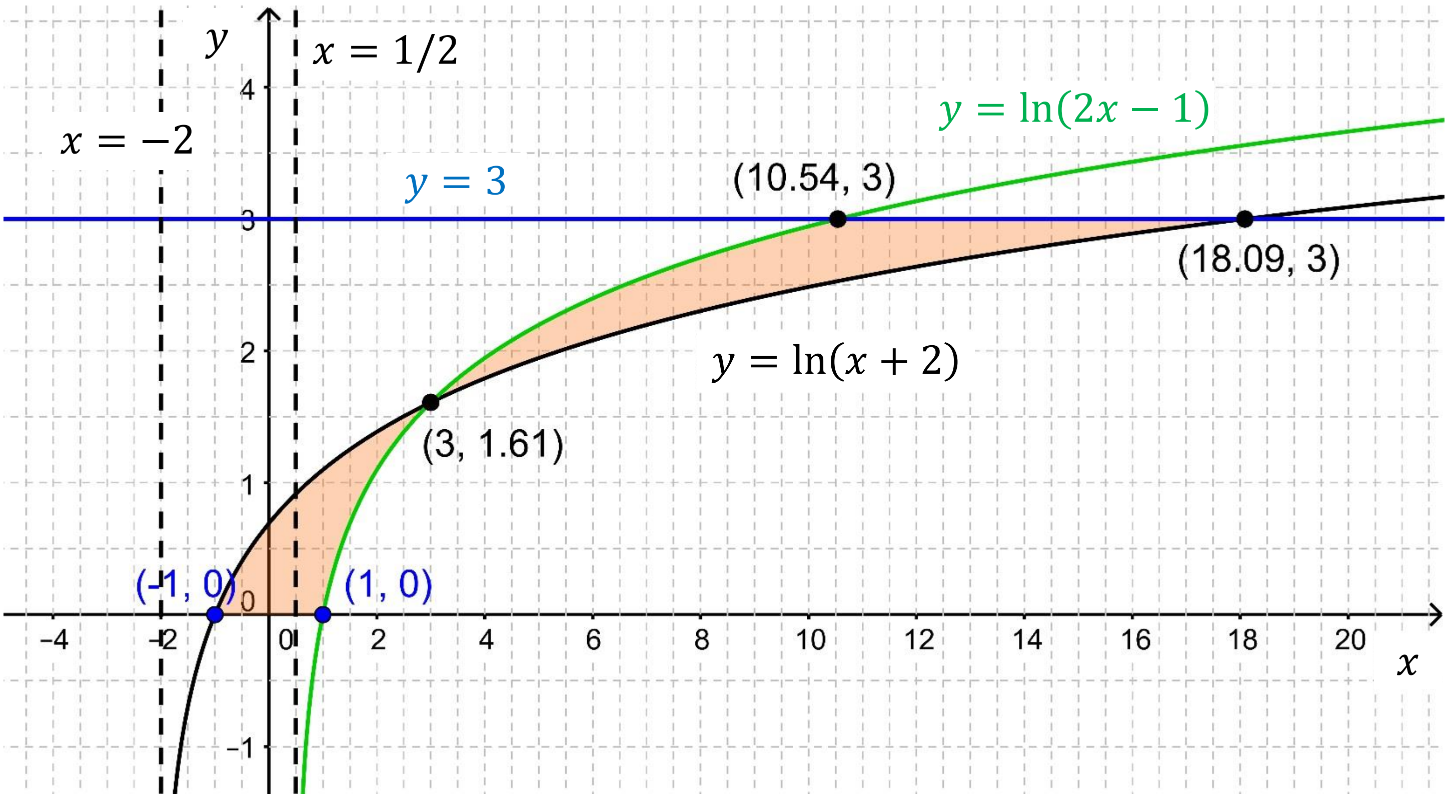
$$\int_0^2 12x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx = 3\int_0^2 4x\sqrt{2x^2 + 1}\, dx = 3\int_0^2 4x(2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 3 \Big/_0^2 \frac{2}{3}(2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 2 \Big/_0^2 (2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 2\left[9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right] = 2 \cdot 26 = 52$$

5. a) Käyrät $y = \ln(x + 2)$ ja $y = \ln(2x - 1)$ rajoittavat välillä $0 \le y \le 3$ kaksiosaisen alueen. Laske sen pinta-ala perustellen, eli välivaiheet (integrointi ja sijoitus on oltava näkyvissä, sitten riittää laskin). Anna tarkka vastaus, kolmidesimaalinen likiarvo ja liitä kuva vastaukseesi.

b) i) Kuinka moneen yhtä suureen osaan on väli $[1,5]$ jaettava, jotta funktioon g: $g(x) = \frac{5}{x}$ kuuluvat ylä- ja alasummat poikkeavat toisistaan vähemmän kuin $0,01$:n verran? ii) Entä kuinka moneen yhtä suureen osaan on väli $[1,5]$ vähintään jaettava, jotta ns. välisumma voidaan pyöristää likiarvoon $8,047$. Hyödynnä aineistot-osiosta löytyvää geogebratiedostoa tehtava3b_bosa.ggb. Entä mikä on välisumman arvo viiden desimaalin tarkkuudella, kun osavälejä on 150 kpl.

a) Piirretään kuva, alla.



JOKO x-AKSELIN SUHTEEN INTEGROINTI TAI y –AKSELIN:

y -AKSELIN SUHTEEN:

Leikkauspisteet: Käyrien $y = \ln(x+2)$ ja $y = \ln(2x-1)$ leikkauspiste:

$$\ln(2x-1) = \ln(x+2) \quad \Longrightarrow \quad 2x - 1 = x + 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 3 \quad \Longrightarrow \quad (3, \ln(5)) \approx (3; 1{,}61)$$

Käyrät ja alue: Käyrästä $y = \ln(x+2)$ tulee $x = e^y - 2$ ja käyrästä $y = \ln(2x-1)$ tulee $x = \frac{e^y+1}{2}$.

Välillä $[0, \ln(5)]$ käyrä $x = \frac{e^y+1}{2}$ saa suurempia arvoja kuin käyrä $x = e^y - 2$, välillä $[\ln(5), 3]$ käyrä $x = e^y - 2$ saa suurempia arvoja kuin käyrä $x = \frac{e^y+1}{2}$. Näin ollen

$$A = \int_0^{\ln(5)} \left(\frac{e^y+1}{2} - e^y + 2\right) dy + \int_{\ln(5)}^{3} \left(e^y - 2 - \frac{e^y+1}{2}\right) dy \overset{\text{LASKIN}}{=} 6{,}089\,958 \ldots \approx 6{,}090$$

TAI x -AKSELIN SUHTEEN:

Leikkauspisteet: Käyrien $y = \ln(x+2)$ ja $y = \ln(2x-1)$ leikkauspisteet x-akselin kanssa: $(-2{,}0)$ ja $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ logaritmien ominaisuutta $\ln(1) = 0$ käyttäen.

Käyrien $y = \ln(x+2)$ ja $y = \ln(2x-1)$ leikkauspisteet suoran $y = 3$ kanssa:

$$3 = \ln(x+2) \quad \Rightarrow \quad e^3 = x+2 \quad \Rightarrow \quad e^3 - 2 = x \quad \Rightarrow \quad (e^3-2, 3) \approx (18{,}09; 3)$$

$$3 = \ln(2x-1) \quad \Rightarrow \quad e^3 = 2x-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^3+1}{2} = x \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{e^3+1}{2}, 3\right) \approx (10{,}54; 3)$$

Käyrien $y = \ln(x+2)$ ja $y = \ln(2x-1)$ leikkauspiste:

$$\ln(2x-1) = \ln(x+2) \quad \Rightarrow \quad 2x-1 = x+2 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad (3, \ln(5)) \approx (3; 1{,}61)$$

Alue: Välillä $[-1{,}1]$ käyrä $y = \ln(x+2)$ saa suurempia arvoja kuin käyrä $y = 0$, välillä $[1{,}3]$ käyrä $y = \ln(x+2)$ saa suurempia arvoja kuin käyrä $y = \ln(2x-1)$, Välillä $\left[3, \frac{e^3+1}{2}\right]$ käyrä $y = \ln(2x-1)$ saa suurempia arvoja kuin käyrä $y = \ln(x+2)$, Välillä $\left[\frac{e^3+1}{2}, e^3-2\right]$ käyrä $y = 3$ saa suurempia arvoja kuin käyrä $y = \ln(x+2)$,

joten

$$A = \int_{-1}^{1} (\ln(x+2) - 0)\,dx + \int_{1}^{3} (\ln(x+2) - \ln(2x-1))\,dx + \int_{3}^{\frac{e^3+1}{2}} (\ln(2x-1) - \ln(x+2))\,dx + \int_{\frac{e^3+1}{2}}^{e^3-2} (3 - \ln(x+2))\,dx$$

$$\overset{\text{LASKIN}}{=} 5 \cdot \ln 5 + \frac{e^3}{2} - 12 = 6{,}089\,958\ldots \approx 6{,}090$$

b) i) Aluksi todetaan, että funktio $g(x) = \frac{5}{x}$ on tarkasteltavalla välillä $[1{,}5]$ aidosti vähenevä. Tällöin (aidon vähenevyyden nojalla) kaikilla välin $[1{,}5]$ jakoon liittyvillä osaväleillä funktio g saa pienimmän arvonsa osavälien päätekohdissa ja vastaavasti funktio g saa suurimman arvonsa osavälien alkukohdissa. Lisäksi pätee, että ensimmäisellä osavälillä suoran minimiarvo m_1 on toisella osavälillä maksimiarvo M_2 ja yleisesti $m_n = M_{n+1}$. Näin ollen ala- ja yläsummista supistuu suurin osa termeistä pois, eli

$$\begin{aligned} S_n &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + \ldots && + M_n\Delta x \\ s_n &= \phantom{M_1\Delta x +{}} m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x + \ldots && + m_n\Delta x \\ \Rightarrow S_n - s_n &= M_1\Delta x + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \ldots \quad + \quad 0 && - m_n\Delta x \end{aligned} .$$

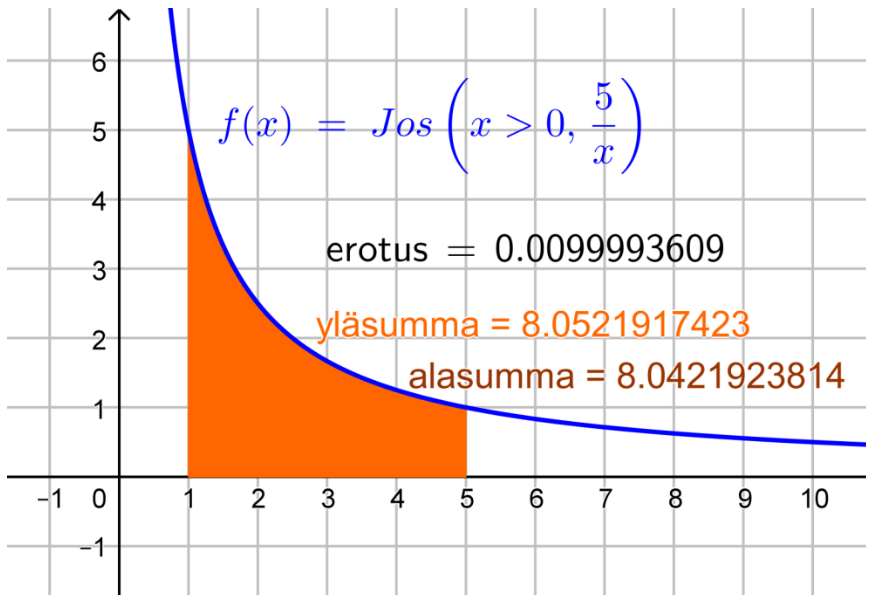
Joten, milloin

$$S_n - s_n = (M_1 - m_n)\Delta x = \big(g(1) - g(5)\big) \cdot \frac{4}{n} = (5-1) \cdot \frac{4}{n} < 0{,}01 \ \ ?$$

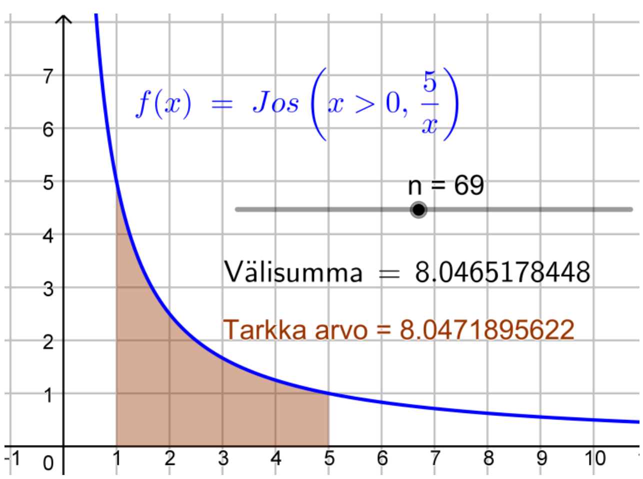
Silloin, kun

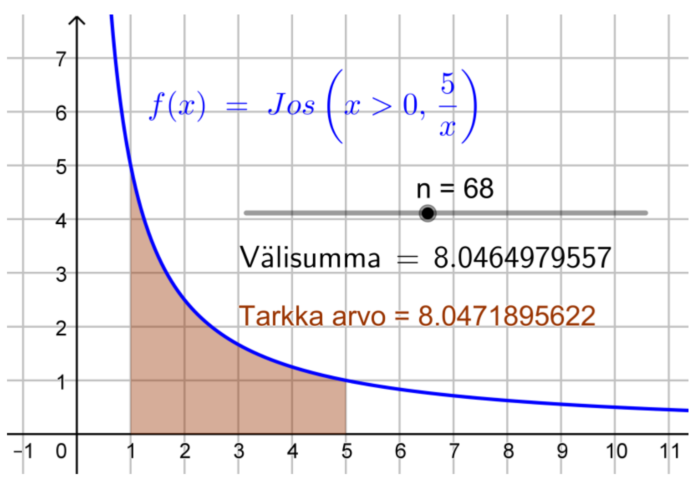
$$\frac{16}{n} < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{16}{0{,}01} < n \quad \Leftrightarrow \quad 1\,600 < n.$$

Näin ollen, kun väli jaetaan vähintään 1600 osaan, on ala- ja yläsummien välinen erotus $S_n - s_n$ pienempää kuin 0,01. Katso kuva alla.

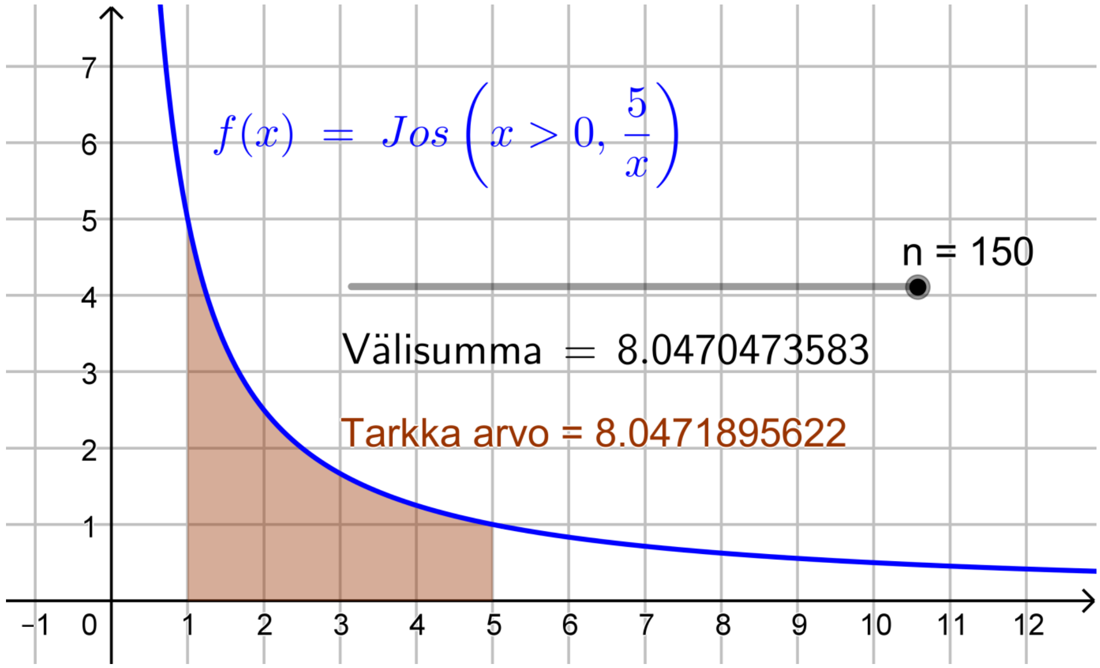


ii) Hyödynnetään aineistot-osion geogebratiedostoa. Kun $n = 69$, eli kun välisummaan otetaan 69 summattavaa, niin tällöin välisumma voidaan pyöristää arvoon 8,047. Katso kuvat.





Ja kun osavälejä otetaan välisummaan 150 kpl, eli $n = 150$, niin välisumman arvo on 8,0470473583. Katso kuva alla.



6. a) **Käyrän $y = e^x$ ja suoran $y = 1$, välillä $[-1, 1]$ rajoittama kaksiosainen alue pyörähtää y-akselin ympäri. Laske tilavuus ja hahmota/piirrä se tasoalue, joka pyörähtää. Kuvan ei siis tarvitse olla tarkka (geogebralla tehty), sen voi tehdä esim. Libreofficen Draw-ohjelmalla, mutta riittävän selkeästi ja tarvittavat tiedot sisältäen. Geogebra toki antaa heti tarkan kuvan.**

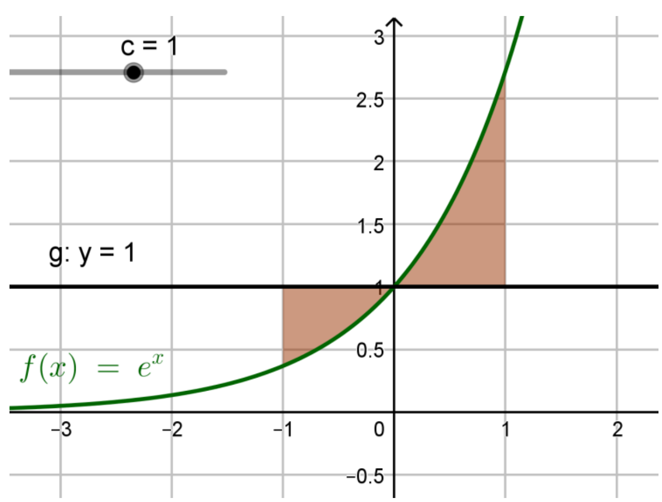
b) Käyrän $y = e^x$ ja suoran $y = c$, missä $c > \frac{1}{e}$, välillä $[-1, 1]$ rajoittama kaksiosainen alue pyörähtää suoran $y = c$ ympäri. Miten tulisi vakio c valita, jotta syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus olisi mahdollisimman pieni? Integrointi riittää tehdä laskinohjelmilla, mutta lauseke tai integraali pitää olla esillä sekä muut perustelut.

a) Käyrän $y = e^x$ ja suoran $y = 1$ leikkauspiste:

$$y = y \quad \Longrightarrow \quad e^x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Ja tällöin $y = 1$. Siis piste $(0,1)$. Katso kuva oik.

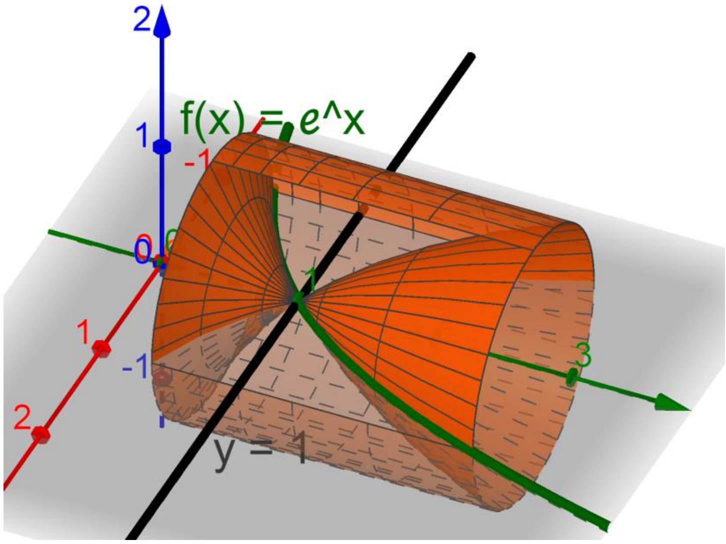
Välillä $[-1,0]$ käyrä $y = f(x) = e^x$ on suoran $y = 1$ alapuolella ja välillä $[0,1]$ yläpuolella, katso kuva yllä.

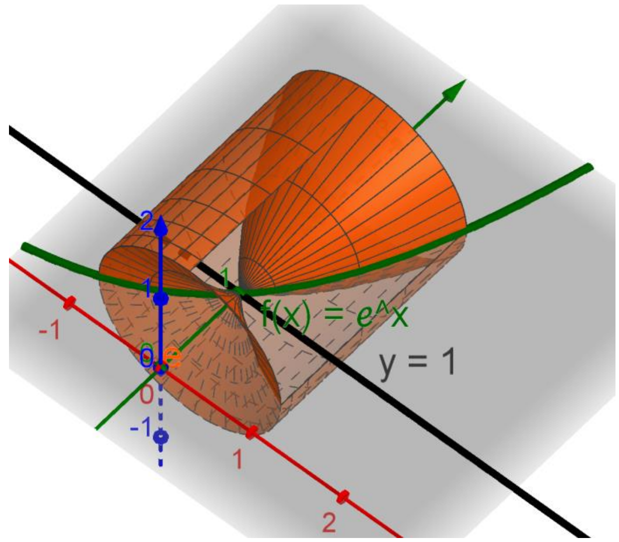


Näin ollen pyörähdyskappaleen tilavuudeksi saadaan

$$V = \underbrace{\pi \cdot 1^2 \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right)}_{V_{\text{lieriö}}} - \int_{e^{-1}}^{e^1} \pi \cdot (\ln y)^2 \, dy = \pi \cdot \left(e - \frac{1}{e}\right) - \pi \cdot \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln y)^2 \, dy \underbrace{= \ \dots \ =}_{\text{laskin}} \frac{4}{e} \cdot \pi \approx 4{,}622$$

Kuvia (ei vaadita!). Alue on pintojen väliin jäävä alue.





b) Nyt siis vakio $c > \frac{1}{e}$ ja **lisäksi pyörähdys tapahtuu x-akselin suuntaisen suoran $y = c$ suhteen**. Integrointiväli on selvä ja nyt kannattaa käyttää itseisarvoa eli funktiota $h: h(x) = |e^x - c|$. Näin ollen tilavuusfunktio muuttujan c suhteen on

$$V: V(c) = \int_{-1}^{1} \pi \cdot |e^x - c|^2 \, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^x - c)^2 \, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^{2x} - 2ce^x + c^2) \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^{2x} - 2ce^x + c^2) \, dx = \pi \cdot \Big/_{-1}^{1} \ \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - 2ce^x + c^2 x$$

$$\underbrace{= \ \dots \ =}_{\text{laskin}} \pi \left(2c^2 + \left(\frac{2}{e} - 2e\right) c + \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)\right)$$

Tämä saatu lauseke normaalisti derivoidaan ja etsitään derivaatan nollakohta jne. Saadaan

$$V'(c) = \pi \left(4c + \frac{2}{e} - 2e\right)$$

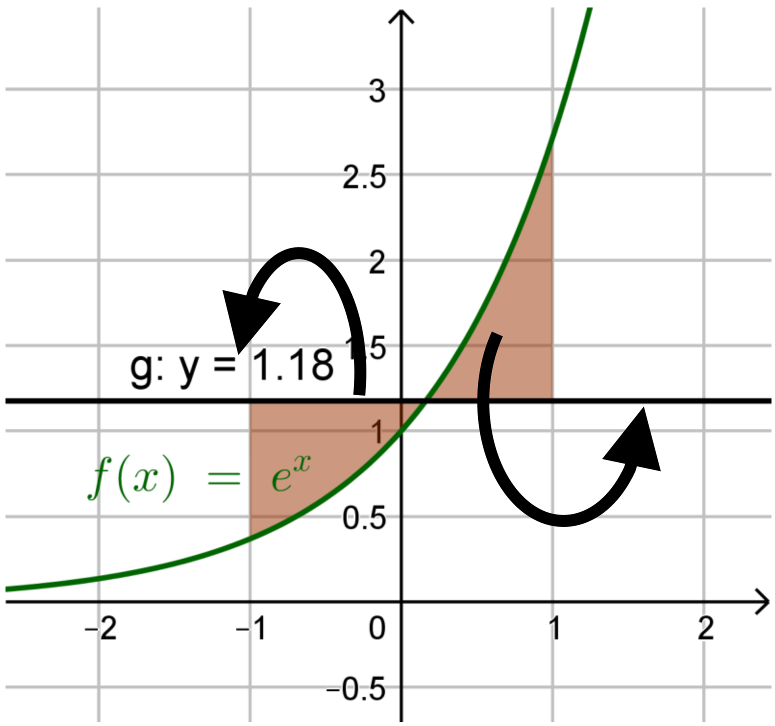
Millä c:n arvolla $V'(c) = 0$?

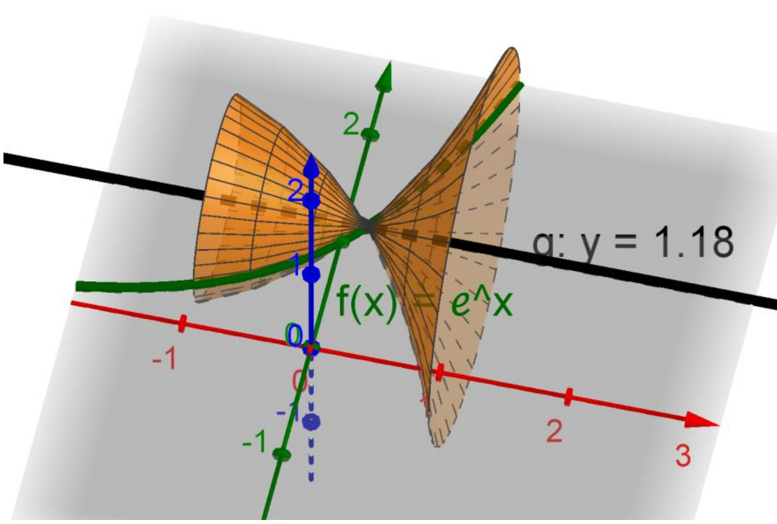
$$\Rightarrow \quad c = \frac{2e - \frac{2}{e}}{4} = \ \dots \ = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

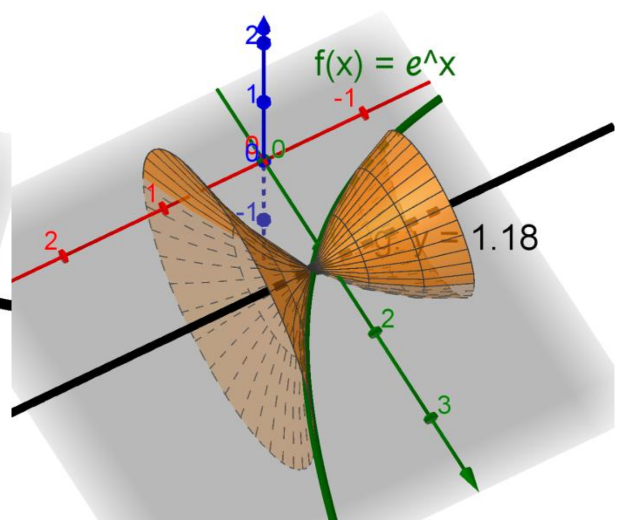
Edelleen joko merkkikaavio tai testiarvot. Lasketaan testiarvot:

$$V'\left(\frac{e-1}{2e}\right) = \cdots = 2 - 2e \approx -3{,}43 \qquad \text{ja} \qquad V'\left(\frac{e^3-1}{2e}\right) = \cdots = 2e^2 - 2e \approx 9{,}34$$

Näin ollen vakion c arvolla $c = \frac{e^2-1}{2e} \approx 1{,}175$ saavuttaa tilavuusfunktio V minimiarvon. Katso kuvat (ei vaadita) alla.

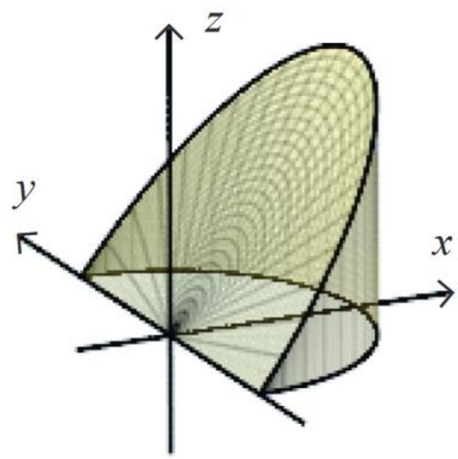






7. Juustoa myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa. Lieriön korkeus on h ja sen pohjan säde on r. Juusto leikataan ensin pystysuorassa suunnassa kahteen yhtäsuureen osaan. Toisesta puolikkaasta leikataan vinosti kuvion osoittama pienempi pala, jonka korkeus on h. Laske tämän juustopalan tilavuus integroimalla. [YO K14/10]

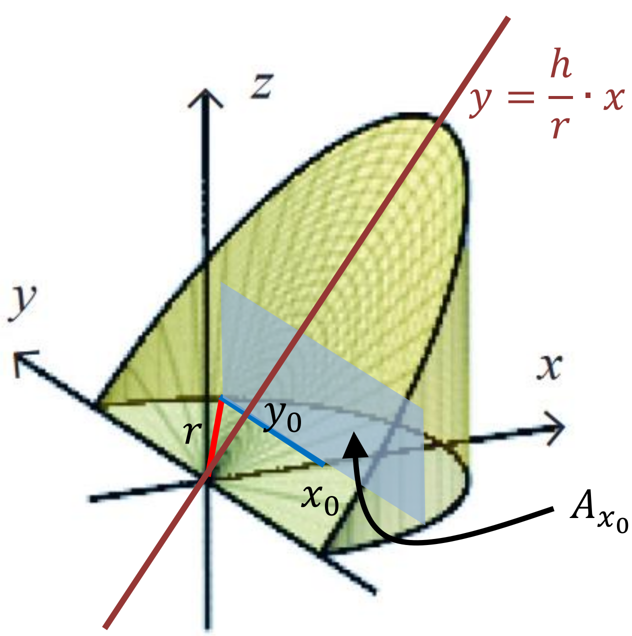
VIHJE: Voit tehdä paloittelun joko x- tai y-akselia vastaan kohtisuorilla tasoilla.



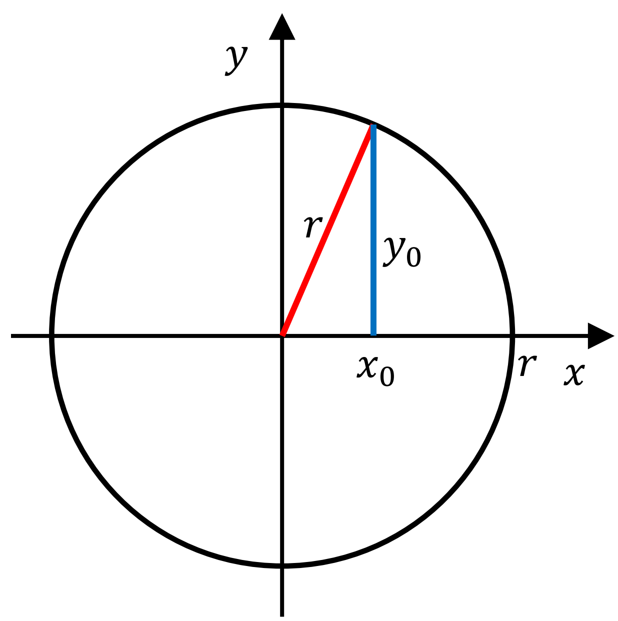
<http://www.valio.fi/tuotteet/juustot/valio-oltermanni>. Luettu 12.3.2013.

Piirretään pari kuvaa ylhäältä ja sivulta

SIVUYLHÄÄLTÄ



YLHÄÄLTÄ



Poikkileikkauspinta on suorakulmio, jonka pohja saadaan Pythagoraasta:

$$y_0 = \sqrt{r^2 - {x_0}^2}$$

ja korkeus suorasta $y = \frac{h}{r} \cdot x$, joten pinta-ala A on

$$A(x_0) = \underbrace{2 \cdot y_0}_{\text{kanta}} \cdot \underbrace{\frac{h}{r} \cdot x_0}_{\text{korkeus}} = 2 \cdot \sqrt{r^2 - {x_0}^2} \cdot \frac{h}{r} \cdot x_0$$

Näin ollen kappaleen tilavuus saadaan integroimalla yli välin $[0, r]$, huomaa, että nyt alaindeksi 0 on otettu pois!

$$V = \int_0^r dV = \int_0^r A(x)\,dx = \int_0^r 2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{h}{r} \cdot x\,dx = -\frac{h}{r} \cdot \int_0^r -2x \cdot (r^2 - x^2)^{1/2}\,dx$$

$$= -\frac{h}{r} \cdot \mathop{/}_{0}^{r} \frac{2}{3}\,(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2h}{3r}\left[0^{\frac{3}{2}} - (r^2)^{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{2h}{3r} \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot hr^2$$

TAI

Tekee paloittelun y-akselin suhteen, jolloin poikkileikkauspinta-ala on suorakulmainen kolmio. Tällöin pinta-ala A on

$$A(y_0) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{x_0}_{\text{kanta}} \cdot \underbrace{\frac{h}{r} \cdot x_0}_{\text{korkeus}} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{r^2 - {y_0}^2}}_{\text{kanta}} \cdot \underbrace{\frac{h}{r} \cdot \sqrt{r^2 - {y_0}^2}}_{\text{korkeus}} = \frac{h}{2r} \cdot (r^2 - {y_0}^2)$$

Näin ollen kappaleen tilavuus saadaan integroimalla yli välin $[-r, r]$, jälleen alaindeksi 0 on otettu pois.

$$V = \int_{-r}^r dV = \int_{-r}^r A(y)\,dy = \int_{-r}^r \frac{h}{2r} \cdot (r^2 - y^2)\,dy = \frac{h}{2r} \cdot \int_{-r}^r (r^2 - y^2)\,dy = \frac{h}{2r} \cdot \mathop{/}_{-r}^{r} r^2 y - \frac{1}{3} y^3$$

$$= \frac{h}{2r}\left[\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right)\right] = \frac{h}{2r}\left(2r^3 - \frac{2}{3}r^3\right) = \frac{h}{2r} \cdot \frac{4}{3}r^3 = \frac{2}{3} \cdot hr^2$$

8. Olkoon f:f(x) funktio, joka on määritelty välillä 0⩽x⩽12. Alla on esitetty funktion

F:F(x)= ∫ x0f(t)dt

kuvaaja välillä 0⩽x⩽12. Arvioi kuvaajan perusteella

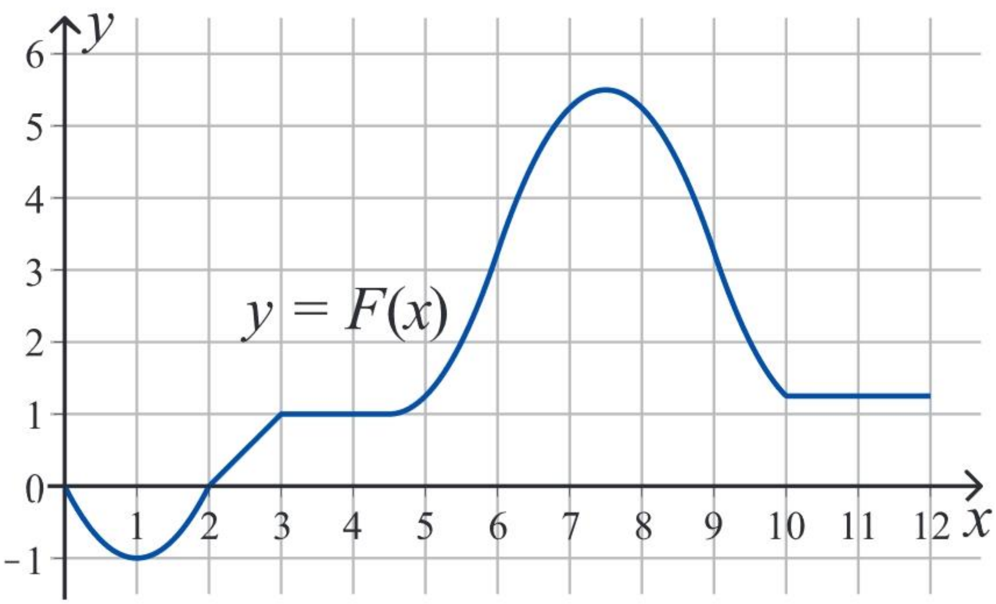
a) määrättyä integraalia

∫ 41f(t)dt ,

b) millä väleillä funktio f on vakio ja

c) millä väleillä funktio f on aidosti vähenevä.

[YO S17/13]



Olkoon \(f\colon f(x)\) funktio, joka on määritelty välillä \(0\leq x \leq 12\). Alla on esitetty funktion\[F\colon F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt\]kuvaaja välillä \(0\leq x \leq 12\). Arvioi kuvaajan perusteella

a) määrättyä integraalia \[\int_{1}^{4}f(t)dt\ ,\]**b)** millä väleillä funktio \(f\) on vakio ja

c) millä väleillä funktio \(f\) on aidosti vähenevä.

[YO S17/13]