Kuinka määrittää pyörähdyskappaleen tilavuus, kun tarkasteltava alue pyörähtää vinon ($k \neq 0$ tai suora ei ole y−akselin suuntainen) suoran suhteen?

Tähän mennessä opittua:

$$-> \quad V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx \qquad \text{ja} \qquad V = \pi \cdot \int_a^b |f(x) - h|^2 \, dx$$

x−akselin suhteen suoran $y = h$ suhteen

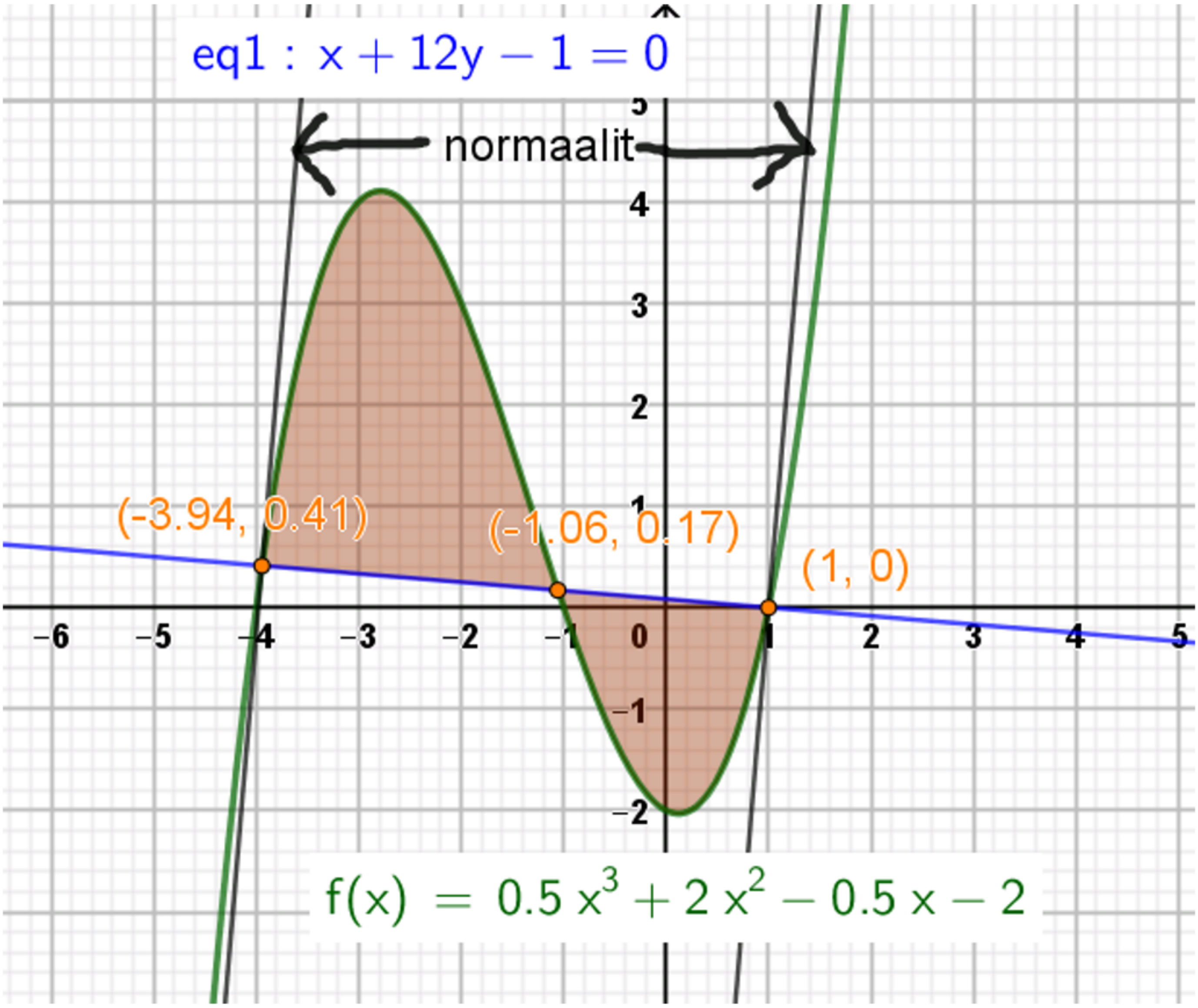
Vastaavasti

$$-> \quad V = \pi \cdot \int_a^b g(y)^2 \, dy \qquad \text{ja} \qquad V = \pi \cdot \int_a^b |g(y) - k|^2 \, dy$$

y−akselin suhteen suoran $x = k$ suhteen

Hyödynnetään etäisyysajatusta seuraavasti:

1) Kun pyörähtävä alue on kiinni pyörähdyssuorassa ja funktion /käyrän kuvaaja ei leikkaa (sivua) pyörähdyssuoralle piirrettyä normaalia kuin yhdesti. Katso esim. kuva alla.



Tällöin voidaan hyödyntää pisteen etäisyys suorasta −kaavaa

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

seuraavalla tavalla:

Suora voidaan muuttaa normaalimuotoon (ellei se jo valmiiksi ole sitä) $ax + by + c = 0$. MAA5−kurssi.

Funktion $y = f(x)$ tai käyrän $y = y(x)$ kuvaajalla olevat pisteet ovat muotoa: $(x, y) = (x, f(x))$ tai $(x, y(x))$

Näin ollen integrandiin voidaan ilmaista etäisyys muuttujan x avulla ja saada tilavuus

$$V = \pi \cdot \int_{\text{alaraja}}^{\text{yläraja}} \left| \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|^2 \mathrm{d}s =$$

$$\pi \cdot \int_{\text{alaraja}}^{\text{yläraja}} \frac{(ax + bf(x) + c)^2}{a^2 + b^2} \mathrm{d}s$$

Nyt kuitenkin dx ei ole oikea −> korjaa ds:ksi eli viipalointi tehdään vinon suoran suhteen $ds = \sqrt{1 + (-1/12)^2}\, dx$ esim MAOLsta.

Siis

$$= \pi \cdot \int_{\text{alaraja}}^{\text{yläraja}} \left(\frac{(ax + bf(x) + c)^2}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{1 + (-1/12)^2} \right) \mathrm{d}x$$

Yllä olevassa kuvassa siis suora: $1 \cdot x + 12 \cdot y - 1 = 0$ eli $a = 1$, $b = 12$ ja $c = -1$. Piste muotoa:

$(x, 0.5x^3+2x^2-0.5x-2)$

Näin ollen (käytetään leikkauspisteiden kaksidesimaalisia likiarvoja ala- ja ylärajoina):

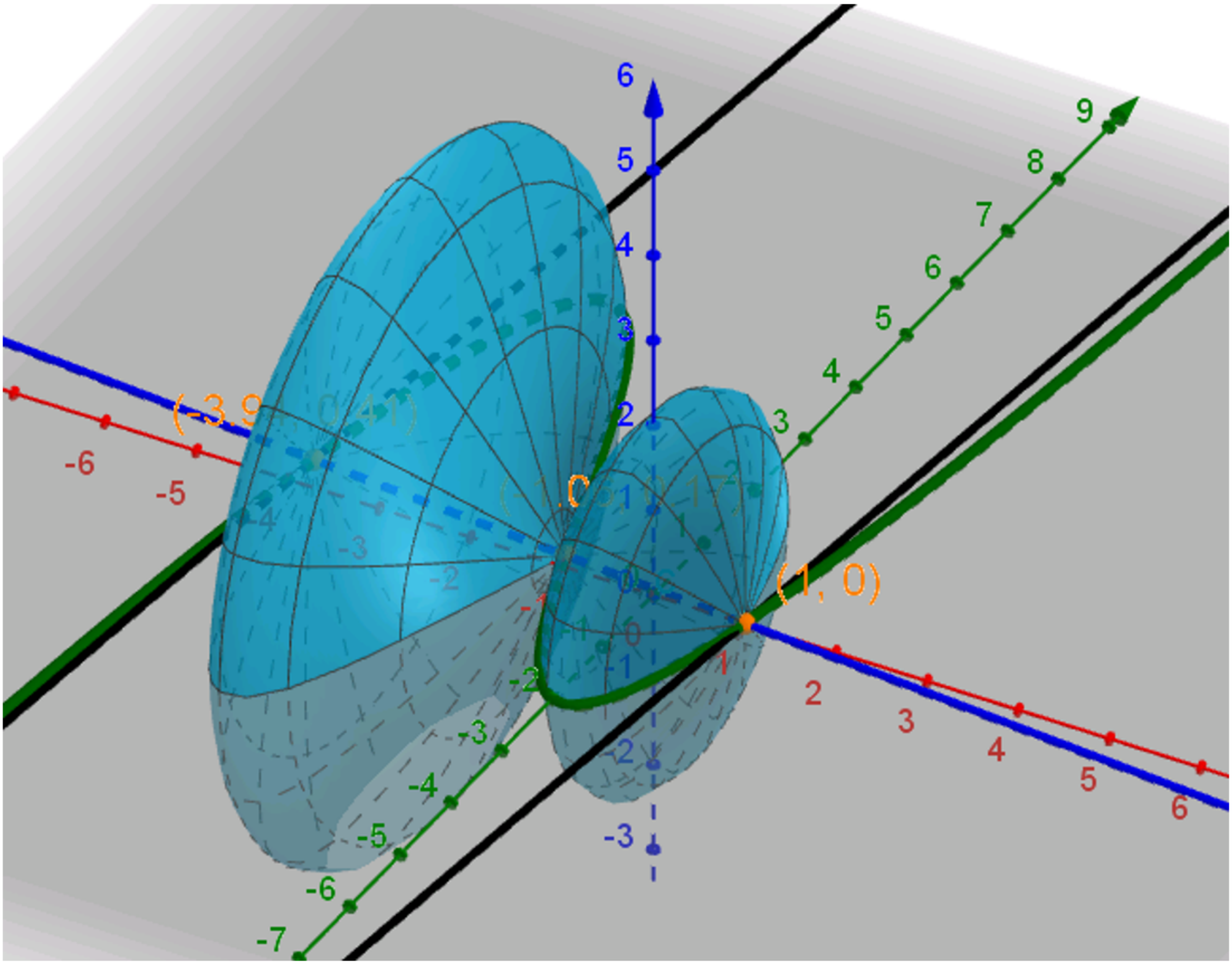
$$= \pi \cdot \int_{-3.94}^{1.} \left(\frac{\left(x+12\cdot\left(0.5\cdot x^3+2\cdot x^2-0.5\cdot x-2\right)-1\right)^2}{1^2+12^2} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{-1}{12}\right)^2} \right) \mathrm{d}x$$

▸ 80.484305602

Jos olisi laskenut dx:llä, niin tulos olisi ollut80.206293353.
Virhe ei ole iso!

Geogebrassa oli isompia hasteita pintojen piirrossa, joten joudun lopettelee tähän (aikaa lelsti melkosesti...)

Tämä kuva ei ole oikea!



(-3.9, 0.41)
(1, 0)