5. a) **Määritä $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x}}\,dx$. Kirjoita välivaiheet näkyviin.** $(2p)$

b) **Olkoon $f: f(x) = |x-2|$. Määritä se f:n integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(0,3)$ kautta.** $(4p)$

a) Aluksi havaitaan, että integrandin eli integroitavan funktion $f: f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x}}$ lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x}} = (x+2)\cdot(x^2+4x)^{-\frac{1}{3}},$$

josta havaitaan (?), että se on lähes muotoa $f'(x)\cdot f(x)^n$. Pitää ensin kertoa ykkösellä $\left(1=\frac{1}{2}\cdot 2\right)$, jolloin saadaan

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x}}\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(x+2)\cdot(x^2+4x)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+4)\cdot(x^2+4x)^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

Tämä integraali on nyt muotoa $\int f'(x)\cdot f(x)^n\,dx$, jonka integraalifunktio on $\frac{1}{n+1}\cdot f(x)^{n+1}+C$. Siis

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2+4x}}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+4)\cdot(x^2+4x)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot(x^2+4x)^{\frac{2}{3}}+C\right)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(x^2+4x)^2}+C'.$$

b) Nyt funktio f on itseisarvofunktiona jatkuva kaikilla $x\in\mathbb{R}$, joten integraalifunktio F on olemassa. Lisäksi f on paloittain määritelty, sillä

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{kun } x-2\geq 0 \text{ eli kun } x\geq 2 \\ -(x-2), & \text{kun } x-2<0 \text{ eli kun } x<2 \end{cases}.$$

Näin ollen

$$F(x) = \begin{cases} \int (x-2)\,dx, & \text{kun } x\geq 2 \\ \int (2-x)\,dx, & \text{kun } x<2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2-2x+C_1, & \text{kun } x\geq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2+2x+C_2, & \text{kun } x<2 \end{cases}.$$

Integraalifunktion on oltava jatkuva kaikkialla (koska se on määritelmän perusteella derivoituva), joten tarkastellaan jatkuvuutta kohdassa $x=2$. Täytyy siis olla

$$\lim_{x\to 2-} F(x) = \lim_{x\to 2+} F(x) = F(2)$$

eli

$$\lim_{x\to 2-}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x+C_2\right)=\lim_{x\to 2+}\left(\frac{1}{2}x^2-2x+C_1\right)=F(2)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2^2+4+C_2=\frac{1}{2}\cdot 2^2-4+C_1$$

$$C_2=2-4+C_1+2-4=C_1-4$$

Siis integraalifunktioksi tulee (nyt vain yksi integroimisvakio mukana!)

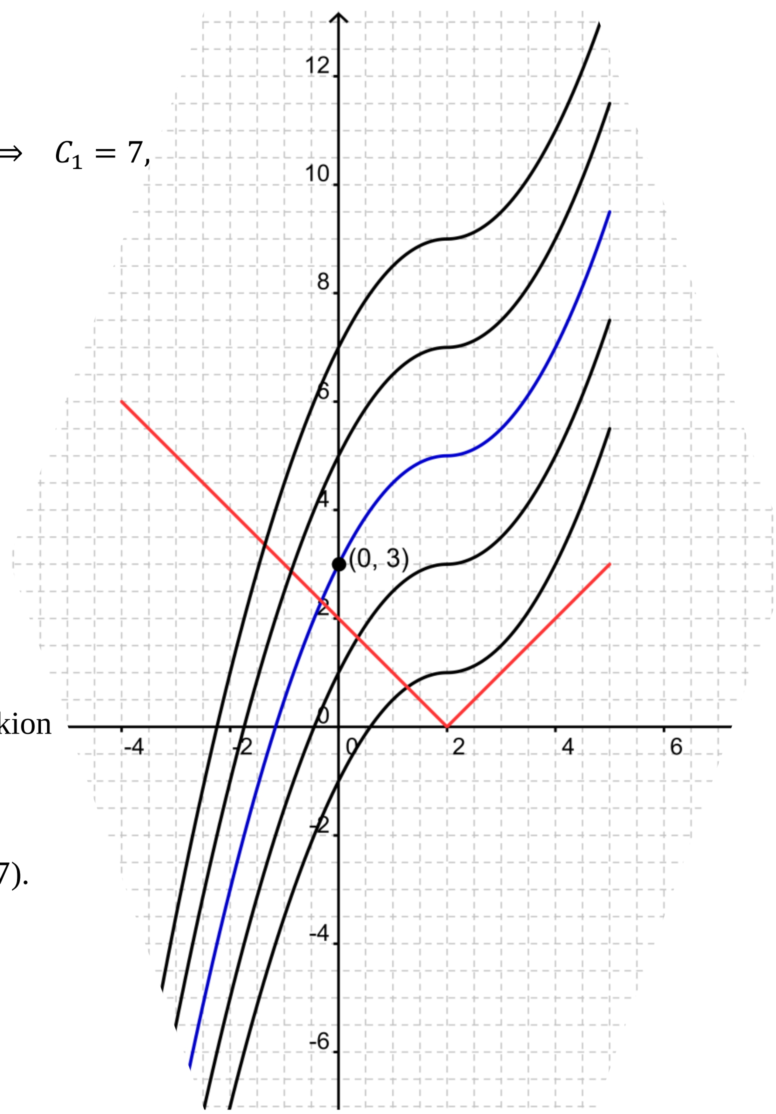
$$F(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}x^2-2x+C_1, & \text{kun } x\geq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2+2x+C_1-4, & \text{kun } x<2 \end{cases} \;=\; \frac{1}{2}(x-2)|x-2|+C'.$$

Vielä pitää etsiä se tietty integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(0,3)$ kautta. Toisin sanoen integraalifunktion arvo kohdassa $x=0$ on 3, eli $F(0)=3$. Pitää valita oikea lauseke koska integraalifunktio on paloittain määritelty. Valitaan se lauseke ($x\geq 2$ tai $x<2$), jolla $x=0$ toteutuu, eli lauseke $-\frac{1}{2}x^2+2x+C_1-4$, saadaan

$$F(0)=\;-\frac{1}{2}\cdot 0^2+2\cdot 0+C_1-4=3 \quad\Longrightarrow\quad C_1=7,$$

ja loppujen lopuksi kysytty integraalifunktio on (katso myös kuvat)

$$F(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2}x^2-2x+7, & \text{kun } x\geq 2 \\ -\frac{1}{2}x^2+2x+3, & \text{kun } x<2 \end{cases}$$



Punaisella on piirretty funktio

$$f\colon f(x)=|x-2|$$

Mustalla on piirretty integraalifunktioita F vakion C_1 arvoilla 3,5,9,11, ja sinisellä on piirretty tehtävässä määritetty integraalifunktio ($C_1=7$).